Université Paris-Dauphine PSL
DEMI2E
Année 2020-2021

ANALYSE 4

Polycopié de Daniela Tonon,
version modifiée par Olivier Glass
(Révision en cours ; version du 15/01/21)

Table des matières

1 Espaces métriques

On se propose dans ce chapitre de faire un important procédé d'abstraction sur les notions que vous avez apprises pour les ensembles $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ (distance, norme, boule, voisinage, partie ouverte, partie fermée, etc). Le but est de les étendre à des structures plus générales, sur lesquelles sont alors naturellement définies des notions comme celles de convergence et de continuité.

1.1 Définition et exemples

La première notion que l'on va introduire est celle d'espace métrique, c'est-à-dire un espace dans lequel on peut mesurer la distance entre deux points. La notion de distance se révélera centrale pour définir d'autres notions.

Dans la suite, X sera un ensemble non vide.

Définition 1.1.1. *On appelle* ***distance*** *une fonction $d : X \times X \to \mathbb{R}$ satisfaisant les propriétés suivantes :*

- $d(x,y) \geq 0$ *pour tous* $x, y \in X$, *(positivité)*
- $d(x,y) = 0 \iff x = y$, *(séparation)*
- $d(x,y) = d(y,x)$ *pour tous* $x, y \in X$, *(symétrie)*
- $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ *pour tous* $x, y, z \in X$, *(inégalité triangulaire).*

Dans ce cas, on appelle ***espace métrique*** *le couple* (X, d).

Dans un espace métrique, on a la propriété suivante, qui découle de l'inégalité triangulaire.

Proposition 1.1.2. *(Deuxième inégalité triangulaire) Soit (X, d) un espace métrique. Alors pour tous $x, y, z \in X$, on a :*

$$d(x,y) \geq |d(x,z) - d(y,z)|.$$

Preuve. Exercice ! □

Exemple 1.1.3. L'ensemble $X = \mathbb{R}$ muni de la distance usuelle $d(x,y) := |x-y|$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ est un espace métrique.

Exemple 1.1.4. L'ensemble $X = \mathbb{C}$ muni de la distance usuelle $d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2|$ pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ est un espace métrique. Ici $|\ |$ est le module d'un nombre complexe.

Exemple 1.1.5. Soit X un ensemble quelconque non vide. On pose, pour tout $x, y \in X$,

$$d(x,y) := \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

On peut vérifier aisément que d est une distance sur X. On appelle cette distance la **distance discrète**. Dans (X, d), tous les points sont à distance 1 entre eux.

Bien évidemment, sur un même ensemble X, on peut définir plusieurs distances (par exemple, $\mathbb{R}$ peut être muni de sa distance usuelle, ou de la distance discrète, ou de beaucoup d'autres). Certaines distances sont suffisamment « similaires » pour partager beaucoup de priopriétés communes (ce que nous verrons plus tard). C'est dans cet esprit que l'on introduit la notion d'équivalence de distances.

Définition 1.1.6. *Deux distances d et d_* sur X sont dites* **équivalentes** *s'il existe deux constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que pour tout $x, y \in X$*

$$C_1 d(x,y) \leq d_*(x,y) \leq C_2 d(x,y).$$

Exemple 1.1.7. On considère sur $X = \mathbb{R}$ la distance usuelle donnée par $|\ |$ et la distance discrète d définie dans l'Exemple 1.1.5 ci-dessus. Ces deux distances ne sont pas équivalentes.

En effet, supposons qu'il existe deux constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$

$$C_1 d(x,y) \leq |x-y| \leq C_2 d(x,y).$$

Posons $x = 0$ et $y = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$ entier. On obtient donc pour tout $n \geq 1$

$$C_1 d(0, 1/n) \leq |1/n| \leq C_2 d(0, 1/n).$$

Mais $d(0, 1/n) = 1$ et donc $C_1 \leq \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$, qui est impossible car $C_1 > 0$. On en déduit que les deux distances ne sont pas équivalentes car l'inégalité $C_1 d(x,y) \leq |x-y|$ ne peut être vérifiée pour aucun $C_1 > 0$.

De même, on peut arriver à une contradiction pour l'inégalité de droite. En choisissant $x = 0$ et $y = n$, $n \geq 1$ entier, on obtient $n \leq C_2$, pour tout $n \geq 1$, ce qui est impossible.

Exemple 1.1.8. Soit $X = \mathbb{R}^n$ ou $X = \mathbb{C}^n$, les fonctions suivantes sont des distances sur X.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \qquad d_p(x,y) := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p} \qquad \text{pour tout } p \geq 1$$
$$d_\infty(x,y) := \max_{i=1,\dots,n} |x_i - y_i|$$

La distance d_2 sur $\mathbb{R}^n$ est dite **distance euclidienne**. Les distances d_p, $1 \leq p \leq \infty$, sont toutes équivalentes sur X (Exercice !).

Donnons encore des exemples importants de distance.

Exemple 1.1.9. Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques. On pose

$$\mathcal{B}(X,Y) := \{ f : X \to Y \mid \exists y \in Y \text{ t.q. } x \mapsto \delta(f(x), y) \text{ est bornée} \}$$

l'ensemble des applications bornées de X dans Y.
(Soit $y \in Y$ alors $x \mapsto \delta(f(x), y)$ bornée s'il existe $M > 0$ tel que $\forall x \in X$ $\delta(f(x), y) < M$)

La fonction

$$\sigma(f,g) := \sup_{x \in X} \delta(f(x), g(x))$$

définit une distance sur $\mathcal{B}(X,Y)$ (Exercice !). On appelle cette distance **distance uniforme**.

Exemple 1.1.10. Soit (X, d) un espace métrique et $Y \subseteq X$ une partie de X. La restriction $d_Y : Y \times Y \to \mathbb{R}$ de la distance d à $Y \times Y$, définie par $d_Y(y_1, y_2) := d(y_1, y_2), \forall y_1, y_2 \in Y$, fait de (Y, d_Y) un espace métrique (Exercice !). On parle alors de **distance induite**.

Exemple 1.1.11. Soient $(X_1, d_1), (X_2, d_2), \dots, (X_n, d_n)$, n espaces métriques. Notons $X := X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$. Pour deux éléments $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ de X posons

$$d(x,y) := \max_{1 \leq i \leq n} d_i(x_i, y_i).$$

La fonction d est bien une distance sur X dite **distance produit** et (X, d) un espace métrique (Exercice !) dit **espace produit** des espaces métriques $(X_1, d_1), (X_2, d_2), \dots, (X_n, d_n)$.

1.2 Espaces Vectoriels Normés

1.2.1 Définition et exemples

Un exemple particulier (et très important) d'espace métrique est celui des espaces vectoriels normés.

On suppose dans cette section que X est un **espace vectoriel** sur $\mathbb{K}$, où $\mathbb{K}$ est soit $\mathbb{R}$ soit $\mathbb{C}$.

Définition 1.2.1. *On appelle* **norme** *une fonction* $\| \ \| : X \to \mathbb{R}$ *satisfaisant les propriétés suivantes :*

- $\|x\| \geq 0$ *pour tout* $x \in X$, *(positivité)*
- $\|x\| = 0 \iff x = 0$, *(separation)*
- $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ *pour tout* $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$ *(homogeneité)*
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *pour tout* $x, y \in X$, *(sous-additivité ou inégalité triangulaire).*

Dans ce cas, on appelle ***espace vectoriel normé (EVN)*** *le couple* $(X, \| \ \|)$.

Remarque 1.2.2. De la sous-additivité on déduit (Exercice !), que l'on a, pour tous $x, y \in X$,

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|.$$

Bien évidemment, sur un même espace vectoriel X, on peut définir plusieurs normes. Comme pour les distances, dans le but de les comparer, on introduit la notion d'équivalence de normes.

Définition 1.2.3. *Deux normes* $\| \ \|$ *et* $\| \ \|_*$ *sur* X *sont dites* **équivalentes** *s'il existe deux constantes* $C_1, C_2 > 0$ *telles que pour tout* $x \in X$

$$C_1\|x\| \leq \|x\|_* \leq C_2\|x\|.$$

Exemple 1.2.4. Soit $X = \mathbb{K}^n$, les fonctions suivantes sont des normes sur X.

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad \|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \qquad \text{pour tout } p \geq 1$$

$$\|x\|_\infty := \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$$

Les normes $\| \ \|_p$, $1 \leq p \leq \infty$, sont toutes équivalentes sur X (Exercice !).

Exemple 1.2.5. L'espace des matrices à n lignes et m colonnes $M_{n,m}(\mathbb{K})$ à entrées dans $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On peut identifier $M_{n,m}(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K}^{nm}$. Les normes $\| \ \|_p$, $1 \leq p \leq \infty$, sont donc des normes équivalentes sur $M_{n,m}(\mathbb{K})$.

Remarque 1.2.6. On verra un peu plus loin que deux normes quelconques sur un espace vectoriel de **dimension finie** sont équivalentes (voir Théorème 2.2.14).

La propriété suivante établit qu'un espace vectoriel normé est cas particulier d'espace métrique.

Proposition 1.2.7. *Soit* $(X, \| \ \|)$ *un espace vectoriel normé, alors*

$$d_{\| \ \|}(x, y) := \|x - y\|$$

pour tout $x, y \in X$, *définit une distance sur* X, *invariante par translation, non bornée si* $X \neq \{0\}$.

Preuve. Exercice ! □

Remarque 1.2.8. Pour un espace vectoriel normé $(X, \| \ \|)$ on utilisera donc librement les notions définies sur un espace métrique en sous-entendant que l'on fait référence à l'espace métrique sous-jacent $(X, d_{\| \ \|})$ tel que défini dans la proposition ci-dessus.

Remarque 1.2.9. Il est immédiat que deux normes sur un espace vectoriel sont équivalentes si et seulement si elles définissent deux distances équivalentes.

Exemple 1.2.10. Soit X un ensemble non vide et $(Y, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$. Soit

$$\mathcal{B}(X, Y) := \{f : X \to Y \mid \exists M_f \geq 0 \text{ t.q. } \|f(x)\| \leq M_f, \forall x \in X\}$$

l'ensemble des applications bornées de X dans Y. Alors $\mathcal{B}(X, Y)$ est un espace vectoriel (de dimension infinie) sur $\mathbb{K}$ que l'on peut munir de la norme suivante (Exercice !) :

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} \|f(x)\|.$$

On appelle cette norme la **norme uniforme**. Remarquer que la distance uniforme définie dans l'Exemple 1.1.9 provient de la norme uniforme si (Y, δ) est un espace vectoriel normé $(Y, \| \ \|)$ et $\delta(y, y') = \|y - y'\|$.

A noter : Si on prend $X = \mathbb{N}$ et $Y = \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) avec la norme $| \ |$, on obtient l'espace vectoriel normé $\ell^\infty(\mathbb{K})$ des suites bornées.

Exemple 1.2.11. Soit $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel (de dimension infinie) des fonctions continues d'un intervalle fermé $I = [a, b]$ dans $\mathbb{R}$, alors pour tout réel $p \geq 1$, $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$

$$\|f\|_p := \left(\int_I |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

définit une norme sur $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ (Exercice !). On appelle cette norme **norme** L^p. La fonction $\| \ \|_\infty$ définie dans l'exemple précédent est aussi une norme sur $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(I, \mathbb{R})$.

Exemple 1.2.12. Soit $(X, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé et Y un sous-espace vectoriel de X. La restriction $\| \ \|_Y : Y \to \mathbb{R}$ de la norme $\| \ \|$ à Y, $\|y\|_Y := \|y\|, \forall y \in Y$, fait de $(Y, \| \ \|_Y)$ un espace vectoriel normé (Exercice !). On parle alors de **norme induite**.

Exemple 1.2.13. Soient $(X_1, \| \ \|_1), (X_2, \| \ \|_2), \ldots, (X_n, \| \ \|_n)$, n espaces vectoriels normés. Notons $X := X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$. Pour $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$ posons

$$\|x\| := \max_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|_i.$$

La fonction $\| \ \|$ est bien une norme sur X dite **norme produit** et $(X, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé (Exercice !) dit **espace produit** des espaces vectoriels normés $(X_1, \| \ \|_1), (X_2, \| \ \|_2), \ldots, (X_n, \| \ \|_n)$.

1.2.2 Espaces préhilbertien et espaces euclidiens

Un cas particulier d'evn est donné par la notion d'espace préhilbertien. On suppose dans cette section que X est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Le cas complexe pourrait être inclus ici, mais supposerait de faire attention à la conjugaison complexe (voir le cours d'Algèbre 3).

Définition 1.2.14. *On appelle **produit scalaire** une fonction $\langle \ , \ \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ qui satisfait les propriétés suivantes :*

- $\forall x \in X, \ \langle x, x \rangle \geq 0$ *(positivité);*
- $\langle x, x \rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ *("définition"),*

- $\forall x, y \in X,\ \langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ *(symétrie),*
- $\forall x, y, z \in X, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \langle \lambda x + \mu y, z\rangle = \lambda\langle x, z\rangle + \mu\langle y, z\rangle$ *(bilinéarité).*

On appelle ***espace préhilbertien*** *le couple* $(X, \langle\ ,\ \rangle)$*. Si* X *est un espace vectoriel de* dimension finie *le couple* $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ *est dit* ***espace euclidien****.*

Exemple 1.2.15. $X = \mathbb{R}^n$ avec le produit scalaire canonique $\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i$ pour tout $x, y \in X$ est un espace euclidien.

Exemple 1.2.16. L'espace vectoriel $M_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées $n \times n$ à entrées dans $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire défini par : pour tous $A, B \in M_n(\mathbb{R})$,

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}({}^t\!AB),$$

est un espace euclidien. (Exercice !)

Exemple 1.2.17. Soit $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues d'un intervalle fermé $I = [a, b]$ dans $\mathbb{R}$, on définit un produit scalaire en posant

$$\forall f, g \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}), \quad \langle f, g\rangle := \int_I f(x)g(x)dx.$$

Le couple $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ est un espace préhilbertien (Exercice !).

Proposition 1.2.18. *(Inégalité de Cauchy-Schwarz) Soit* $\langle\ ,\ \rangle$ *un produit scalaire sur* X*, alors pour tout* $x, y \in X$

$$|\langle x, y\rangle| \leq \langle x, x\rangle^{1/2}\langle y, y\rangle^{1/2},$$

avec égalité si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ *t.q.* $x = \lambda y$ *ou* $y = \lambda x$*.*

Un espace préhilbertien (et donc un espace euclidien) est un espace vectoriel normé (et donc aussi un espace métrique).

Proposition 1.2.19. *Soit* $\langle\ ,\ \rangle$ *un produit scalaire sur* X*, alors on obtient une norme sur* X *en posant pour tout* $x \in X$

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Preuve. Exercice ! □

Proposition 1.2.20. *Soit* $\langle\ ,\ \rangle$ *un produit scalaire sur* X *et* $x, y \in X$*. Alors*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad \textit{(identité du parallélogramme),}$$

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\|x + y\|^2 - \frac{1}{4}\|x - y\|^2 \quad \textit{(identité de polarisation),}$$

et on a $\langle x, y\rangle = 0$ *si et seulement si*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad \textit{(théorème de Pythagore).}$$

Preuve. Exercice ! □

1.3 Boules ouvertes, boules fermées, sphères

On suppose dorénavant que (X, d) est un espace métrique fixé. Grâce à la notion de distance on peut définir des boules d'une manière analogue aux disques du plan ou aux boules de l'espace. Cette notion sera à la base de celle de « voisinage » d'un point et de toutes les définitions qui suivront dans ce chapitre.

Définition 1.3.1. *Soient $x_0 \in X, r \in \mathbb{R}$.*
On appelle **boule ouverte** *de centre x_0 et de rayon $r > 0$ l'ensemble*

$$B_d(x_0, r) := \{x \in X \mid d(x_0, x) < r\}.$$

On appelle **boule fermée** *de centre x_0 et de rayon $r \geq 0$ l'ensemble*

$$\overline{B}_d(x_0, r) := \{x \in X \mid d(x_0, x) \leq r\}.$$

On appelle **sphère** *de centre x_0 et de rayon $r \geq 0$ l'ensemble*

$$S_d(x_0, r) := \{x \in X \mid d(x_0, x) = r\}.$$

Remarque 1.3.2. Soit $x_0 \in X$, et $r > 0$. On note que, bien évidemment, $x_0 \in B_d(x_0, r)$, et donc $B_d(x_0, r) \neq \emptyset$. De plus on a assez clairement :

$$B_d(x_0, r) \subseteq \overline{B}_d(x_0, r) \quad \text{et} \quad S_d(x_0, r) \subseteq \overline{B}_d(x_0, r),$$

et pour $x_0 \in X$ et $0 < r_1 < r_2$:

$$B_d(x_0, r_1) \subseteq B_d(x_0, r_2) \quad \text{et} \quad \overline{B}_d(x_0, r_1) \subseteq \overline{B}_d(x_0, r_2).$$

Exemple 1.3.3. Soit (X, d) un espace métrique où X est un ensemble quelconque non vide et d est la distance discrète définie dans l'Exemple 1.1.5. Alors pour tout $x \in X$,
$B_d(x, r) = \{x\}$ si $0 < r \leq 1$ et $B_d(x, r) = X$ si $r > 1$;
$\overline{B}_d(x, r) = \{x\}$ si $0 \leq r < 1$ et $\overline{B}_d(x, r) = X$ si $r \geq 1$;
$S_d(x, 0) = \{x\}$, $S_d(x, r) = \emptyset$ si $0 < r < 1$ et $S_d(x, 1) = X \setminus \{x\}$, $S_d(x, r) = \emptyset$ si $r > 1$.

Dans le cas particulier d'un espace vectoriel normé les boules centrées en 0 de rayon 1 jouent le rôle de référence (car toutes les autres boules correspondent à des translations et/ou des homothéties de celles-ci).

Définition 1.3.4. *Dans un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$, $(X, \| \|)$, on appelle* **boule unité ouverte** *l'ensemble*

$$B(0, 1) := \{x \in X \mid \|x\| < 1\}.$$

De manière analogue, on peut définir la boule unité fermée $\overline{B}(0, 1)$ et la sphère unité $S(0, 1)$.

Dans un espace métrique, on peut toujours séparer deux points avec des boules ouvertes.

Proposition 1.3.5. *(Propriété de Hausdorff) Soient $x_1 \neq x_2 \in X$. Alors il existe $r_1, r_2 > 0$ tels que $B_d(x_1, r_1) \cap B_d(x_2, r_2) = \emptyset$.*

Preuve. Soient $x_1 \neq x_2 \in X$, donc $d(x_1, x_2) > 0$. On pose $r_1 = r_2 := \frac{1}{3} d(x_1, x_2)$. Pour tout $y \in B_d(x_1, r_1)$, on a

$$d(x_2, y) \geq d(x_2, x_1) - d(x_1, y) > \frac{2}{3} d(x_1, x_2)$$

donc $y \notin B_d(x_2, r_2)$ et alors $B_d(x_1, r_1) \cap B_d(x_2, r_2) = \emptyset$. □

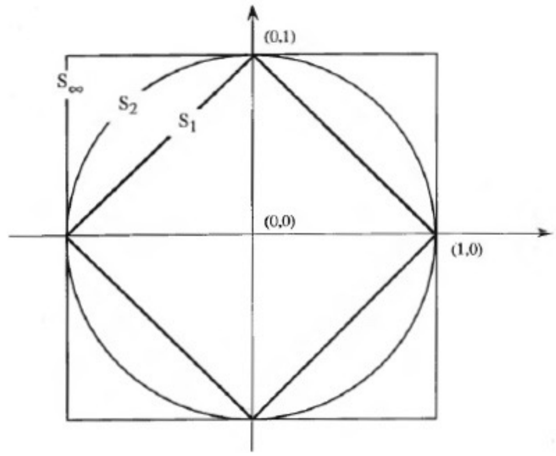

Figure 1: Sphères unité dans $\mathbb{R}^2$ pour les normes $\| \ \|_1, \| \ \|_2, \| \ \|_\infty$

On remarque que la notion de boule dépend de la distance choisie. On peut donc comparer les boules données par des distances différentes.

Remarque 1.3.6. Soient d et d_* deux distances équivalentes sur X, i.e. il existe $C_1, C_2 > 0$ telles que pour tout $x, y \in X$

$$C_1 d(x,y) \leq d_*(x,y) \leq C_2 d(x,y).$$

Alors (Exercice !) pour tout $x_0 \in X, r > 0$, on a

$$B_d(x_0, r) \subseteq B_{d_*}(x_0, C_2 r) \text{ et } B_{d_*}(x_0, r) \subseteq B_d(x_0, \frac{r}{C_1}).$$

On en déduit alors que les boules ouvertes de d et d_* sont emboîtées les unes dans les autres.

Toutes les définitions qui viennent utilisent la notion de boule ouverte et de distance. On pourra vérifier (Exercice !) que deux distances équivalentes définissent les mêmes voisinages, points intérieurs, points adhérents, ouverts, fermés, parties bornées, suites convergentes, fonctions continues, etc.

Comme deux normes quelconques sur un espace vectoriel de **dimension finie** sont équivalentes (voir Théorème 2.2.14), on aura que toutes les distances qui proviennent d'une norme sur un espace vectoriel de dimension finie définissent les mêmes voisinages, points intérieurs, points adhérents, ouverts, fermés, parties bornées, etc., suites convergentes et fonctions continues. Sur un espace vectoriel normé de dimension finie (par exemple sur $\mathbb{R}^n$), on parlera donc plus simplement de boules, voisinages, ouverts, fermés, etc. sans spécifier la distance, quand on fait référence aux boules, voisinages, ouverts, fermés, etc. pour n'importe quelle distance provenant d'une norme.

Remarque 1.3.7. Soient (X, d) un espace métrique et Y une partie de X. On considère l'espace métrique (Y, d_Y) avec d_Y la distance induite. On a alors (Exercice !) : $\forall x_0 \in Y$, $r > 0$

$$B_{d_Y}(x_0, r) = Y \cap B_d(x_0, r).$$

Comme toutes les définitions qui suivront dans ce chapitre utilisent la notion de boule ouverte on aura que pour les notions relatives à la distance induite il faudra toujours considérer des boules de la forme $B_{d_Y}(x_0, r) = Y \cap B_d(x_0, r)$.

1.4 Voisinages, points intérieurs et points adhérents

Soit (X, d) un espace métrique et E une partie de X, i.e. un sous-ensemble de X, $E \subseteq X$. On se propose maintenant d'établir le « placement » d'un point $x_0 \in X$ par rapport à la partie E.

Définition 1.4.1. *On appelle* **distance de** x_0 **à** E *le nombre réel défini par*

$$d(x_0, E) := \inf_{y \in E} d(x_0, y).$$

Remarque 1.4.2. Attention ! En général, il n'existe pas forcément de point $y \in E$ tel que $d(x_0, E) = d(x_0, y)$.

Définition 1.4.3. *On dit que E est un* **voisinage de** x_0*, s'il existe une boule ouverte centrée en x_0 contenue dans E. Autrement dit, si*

$$\exists r > 0 \text{ t.q. } B_d(x_0, r) \subseteq E.$$

Remarque 1.4.4. Chaque boule ouverte centrée en x_0 est un voisinage de x_0!

Donnons quelques propriétés élémentaires des voisinages.

Proposition 1.4.5.

i) Toute partie de X contenant un voisinage de x_0 est un voisinage de x_0.

ii) L'intersection de deux voisinages de x_0 est un voisinage de x_0.

Preuve.

i) Soit A une partie de X contenant un voisinage E de x_0. Alors

$$\exists r > 0 \text{ t.q. } B_d(x_0, r) \subseteq E \subseteq A.$$

Donc A est un voisinage de x_0.

ii) Soient E_1 et E_2 deux voisinages de x_0. Alors

$$\exists r_1, r_2 > 0 \text{ t.q. } B_d(x_0, r_1) \subseteq E_1 \text{ et } B_d(x_0, r_2) \subseteq E_2.$$

Soit $r = \min\{r_1, r_2\}$ alors $B_d(x_0, r) \subseteq E_1 \cap E_2$.

□

Définition 1.4.6.

i) Un point $x_0 \in X$ est un **point intérieur** *à E si E est un voisinage de x_0, i.e. si*

$$\exists r > 0 \quad \text{t.q. } B_d(x_0, r) \subseteq E.$$

ii) Un point $x_0 \in X$ est un **point adhérent** *à E si tout voisinage de x_0 a une intersection non vide avec E, i.e.*

$$\forall r > 0,\ \exists x \text{ t.q. } x \in B_d(x_0, r) \cap E,$$

ou, de manière équivalente, $\forall r > 0,\ \exists x \in E$ t.q. $d(x_0, x) < r$.

On peut aussi exprimer ces notions à l'aide de la distance à une partie. On rappelle ici que l'on note $E^c = X \setminus E$ la partie complémentaire de E dans X.

Proposition 1.4.7. *Soit $E \neq X$ et $x_0 \in X$. Alors* *i) x_0 est un point intérieur à E si et seulement si $d(x_0, E^c) > 0$.*

ii) x_0 est un point d'adhérence à E si et seulement si $d(x_0, E) = 0$.

Preuve. Exercice ! □

Remarque 1.4.8. Noter qu'un point x_0 adhérent à E peut appartenir à E ou à E^c. En revanche un point intérieur appartient forcément à E. D'un autre côté, si $x_0 \in E$, alors x_0 est forcément un point adhérent à E, mais il n'est pas forcément intérieur à E.

Exemple 1.4.9. Soit $X = \mathbb{R}$ avec $d(x,y) := |x-y|$, i.e. $(\mathbb{R}, |\ |)$. On considère quatre réels $a < b < c < d$ et on introduit l'ensemble

$$E =]a,b[\cup \{c\} \cup [d,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \cup \{c\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq d\}.$$

Chaque point de E (c inclus) est adhérent à E. De plus, a et b sont aussi points adhérents à E.

Remarque 1.4.10. En regardant l'Exemple 1.4.9, on s'aperçoit que le point c est différent des autres points adhérents à E car il se trouve « tout seul ». On peut donc raffiner notre définition de point adhérent de la façon suivante.

Définition 1.4.11.

i) Un point $x_0 \in X$ est un **point isolé** *de E si*

$$\exists r > 0 \quad t.q. \ B_d(x_0, r) \cap E = \{x_0\}.$$

ii) Un point $x_0 \in X$ est un **point d'accumulation** *de E si*

$$\forall r > 0, \ \exists x \neq x_0 \ t.q. \ x \in B_d(x_0, r) \cap E.$$

Un point isolé ou d'accumulation est un point d'adhérence. Réciproquement, un point d'adhérence est soit isolé, soit d'accumulation !

En revenant à l'Example 1.4.9, c est point isolé alors que tous les points de $E \setminus \{c\}$ sont des points d'accumulation. a et b sont aussi des points d'accumulation de E.

Définition 1.4.12. *Un point $x_0 \in X$ est un* **point de frontière** *de E si x_0 est un point adhérent à E qui n'est pas intérieur à E, i.e.*

$$\forall r > 0, \ \exists x_1 \in B_d(x_0, r) \cap E \ \text{et} \ \exists x_2 \in B_d(x_0, r) \cap E^c.$$

Exemple 1.4.13. En revenant à l'Exemple 1.4.9, a, b, c, d sont points de frontière de E.

Exemple 1.4.14. On considère maintenant $\mathbb{Q}$ comme partie de $\mathbb{R}$. On sait que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$; il suit que chaque point de $\mathbb{R}$ est point d'accumulation et de frontière de $\mathbb{Q}$.

1.5 Parties ouvertes, parties fermées

Soit (X, d) un espace métrique et E une partie de X. Grâce aux définitions précédentes, on peut formaliser la notion de partie ouverte et partie fermée.

Définition 1.5.1.

i) E est dite **partie ouverte** *si chaque point de E est point intérieur à E.*

ii) E est dite **partie fermée** *si elle contient tous ses points d'adhérence.*

Remarque 1.5.2. L'ensemble X tout entier est à la fois ouvert et fermé. Il en est de même pour l'ensemble vide. Pour tout $x \in X$, le singleton $\{x\}$ est une partie fermée de X. (Ces propriétés sont vraies pour n'importe quelle distance !)

ATTENTION : Un voisinage de x_0 n'est pas forcément une partie ouverte !

Proposition 1.5.3. *Une boule ouverte, définie dans la Définition 1.3, est une partie ouverte de X.*

Preuve. Considérons une boule $B_d(x_0, r)$, de centre $x_0 \in X$ et de rayon $r > 0$. Soit $y \in B_d(x_0, r)$; montrons qu'il est intérieur à $B_d(x_0, r)$. Posons $\tilde{r} = r - d(x_0, y)$ (qui est un réel strictement positif par la définition de $B_d(x_0, r)$!) et montrons que $B_d(y, \tilde{r}) \subset B_d(x_0, y)$. Pour $z \in B_d(y, \tilde{r})$, on a par inégalité triangulaire :

$$d(z, x_0) \leq d(z, y) + d(y, x_0) < \tilde{r} + d(y, x_0) = r.$$

On a donc $z \in B_d(x_0, r)$. On a donc bien prouvé $B_d(y, \tilde{r}) \subseteq B_d(x_0, r)$, et donc que tout $y \in B_d(x_0, r)$ est intérieur à $B_d(x_0, r)$. □

Théorème 1.5.4. *Soit (X, d) un espace métrique, $E \subseteq X$. Alors E est une partie fermée si et seulement si E^c est une partie ouverte.*

Preuve. $\Rightarrow$ Soit E une partie fermée. On veut montrer que E^c est ouverte, i.e. que chaque point de E^c est point intérieur à E^c. Soit $x_0 \in E^c$, alors x_0 n'est pas un point adhérent à E car E est une partie fermée, donc elle contient tous ses points adhérents. Il existe donc $r_0 > 0$ tel que $B_d(x_0, r_0) \cap E = \emptyset$, i.e. $B_d(x_0, r_0) \subseteq E^c$.

$\Leftarrow$ Soit E une partie de X telle que E^c soit une partie ouverte. On veut montrer que E est fermée, i.e. que E contient tous ses points d'adhérence. Soit donc x_0 un point d'adhérence de E. Si on avait $x_0 \in E^c$, alors comme E^c est ouvert, on pourrait trouver $r > 0$ tel que $B_d(x_0, r) \subset E^c$. Mais cela contredirait directement le fait que x_0 est un point d'adhérence de E, qui permet d'affirmer au contraire que $B_d(x_0, r) \cap E \neq \emptyset$. □

Exemple 1.5.5. Une boule fermée et une sphère, définies dans la Définition 1.3, sont des parties fermées de X.

En effet, soit $x_0 \in X$ et $r \geq 0$. On montre que

$$(\overline{B}_d(x_0, r))^c = \{x \in X \mid d(x_0, x) > r\}$$

est une partie ouverte. Soit $x \in (\overline{B}_d(x_0, r))^c$, il existe $s > 0$ tel que $d(x_0, x) = r + s > r$ (car $x_0 \notin \overline{B}_d(x_0, r)$). En choisissant $\frac{s}{2} > 0$, on a que pour tout $y \in B_d(x, \frac{s}{2})$,

$$d(y, x_0) \geq d(x_0, x) - d(x, y) \geq r + s - \frac{s}{2} = r + \frac{s}{2} > r.$$

Donc $B_d(x, \frac{s}{2}) \subset (\overline{B}_d(x_0, r))^c$, i.e. x est un point intérieur à $(\overline{B}_d(x_0, r))^c$ et $(\overline{B}_d(x_0, r))^c$ est ouvert.

Soit $x_0 \in X$ et $r \geq 0$. Comme $(S_d(x_0, r))^c = (\overline{B}_d(x_0, r))^c \cup B_d(x_0, r)$ est l'union de deux parties ouvertes, c'est un ouvert (on peut aisément déduire cette propriété de la définition, voir aussi la Proposition 1.5.10 plus bas). L'ensemble $S_d(x_0, r)$ est par consequent fermé.

Exemple 1.5.6. Dans $(\mathbb{R}, |\ |)$:

L'ensemble $E =]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ est une partie ouverte : en effet pour tout $x_0 \in E$, il existe $r = \min\{\frac{b - x_0}{2}, \frac{x_0 - a}{2}\}$ tel que $B_d(x_0, r) \subset E$, donc x_0 est intérieur à E.

Toutes les parties du genre

$$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}, \quad]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$$

sont ouvertes, tandis que les parties

$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}, \quad [a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, \quad]-\infty, b] = \{x \in R \mid x \leq b\}$$

sont fermées. Les parties

$$[a,b[=\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x<b\},\quad]a,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\le b\}$$

ne sont ni ouvertes ni fermées. Les seules parties fermées et ouvertes de $\mathbb{R}$ sont $\emptyset$ et $\mathbb{R}$.

On appelle **intervalle** de $\mathbb{R}$ toute partie de $\mathbb{R}$ de la forme $]-\infty,b[$, $]-\infty,b]$, $]a,b[$, $[a,b[$, $]a,b]$, $[a,b]$, $[a,+\infty[$, $]a,+\infty[$, $]-\infty,+\infty[$.

Dans l'Exemple 1.4.9, $E=]a,b[\cup\{c\}\cup[d,+\infty[$ n'est pas ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}$.

Exemple 1.5.7. Dans $(\mathbb{R}^2,\|\ \|_2)$, soit $E=E_1\cup E_2\cup E_3$ où

$$\begin{aligned}E_1&=\{x\in\mathbb{R}^2\mid \|x\|_2\le 1\}\\ E_2&=\{x\in\mathbb{R}^2\mid 3<x_1<4,\ x_2=1\}\\ E_3&=\{(2,2)\}.\end{aligned}$$

L'ensemble des points adhérents à E est : $E\cup\{(3,1)\}\cup\{(4,1)\}$. (Parmi lesquels $(2,2)$ est un point isolé, les autres points étant d'accumulation.)
L'ensemble des points intérieurs à E est : $\{x\in\mathbb{R}^2\mid \|x\|_2<1\}$.
L'ensemble des points de frontière de E est : $\{x\in\mathbb{R}^2\mid \|x\|_2=1\}\cup\{(2,2)\}\cup\{(x_1,1)\mid 3\le x_1\le 4\}$.
Tous les autres points de $\mathbb{R}^2$ sont des points intérieurs à E^c.
E n'est pas une partie ouverte (le point $(2,2)\in E$ n'est pas intérieur à E).
E n'est pas une partie fermée (le point d'adhérence $(3,1)$ n'appartient pas à E).

Exemple 1.5.8. Soit (X,d) un espace métrique où X est un ensemble quelconque non vide et d est la distance discrète définie dans l'Exemple 1.1.5. Soit E une partie quelconque de X alors elle est fermée et ouverte.
E est une partie fermée : il faut montrer que E contient tous ses points d'adhérence. Or pour tous $x\in X$ et $r\le 1$, $B_d(x,r)=\{x\}$, tandis que si $r>1$, $B_d(x,r)=X$. Donc x est d'adhérence pour E (i.e. $\forall r>0,\ \exists y$ t.q. $y\in B_d(x,r)\cap E$) si et seulement si $x\in E$. Il s'ensuit que E contient tous ses points d'adhérence.
E est une partie ouverte : en effet si $x\in E$ il existe $r\le 1$, tel que $B_d(x,r)=\{x\}\subset E$, donc x est intérieur à E.
(Tous les points d'adhérence de E sont aussi points intérieurs à E, donc E n'a pas de points de frontière. Chaque point de E est aussi un point isolé.)

Exemple 1.5.9. L'ensemble $]0,1]$ n'est ni ouvert ni fermé dans $(\mathbb{R},|\ |)$, est ouvert dans $(]-\infty,1],|\ |)$, fermé dans $(]0,2],|\ |)$, et ouvert et fermé dans $(]0,1],|\ |)$. Ici, avec un abus de notation, on note encore $|\ |$ la norme induite.

Proposition 1.5.10.

i) Toute union (même infinie) de parties ouvertes de (X,d) est une partie ouverte. Une intersection **finie** *de parties ouvertes de (X,d) est une partie ouverte.*

ii) Une union **finie** *de parties fermées de (X,d) est une partie fermée. Toute intersection (même infinie) de parties fermées de (X,d) est une partie fermée.*

Preuve. *i)* Soit A un ensemble quelconque (fini ou infini). Pour tout $\alpha\in A$, soit O_α un ouvert. On veut montrer que $\cup_{\alpha\in A}O_\alpha$ est ouvert. Soit $x\in\cup_{\alpha\in A}O_\alpha$, il existe au moins un indice α_0 tel que x appartient à O_{α_0} qui est ouvert. Ainsi, il existe $r>0$ tel que $B_d(x,r)\subset O_{\alpha_0}$ et donc $B_d(x,r)\subset\cup_{\alpha\in A}O_\alpha$. Par consequent, pour tout $x\in\cup_{\alpha\in A}O_\alpha$, x est intérieur à $\cup_{\alpha\in A}O_\alpha$ qui est donc ouvert.

Soit $J=\{1,\dots,n\}$ un ensemble fini. À tout $j\in J$ on associe un ouvert O_j. On veut montrer que $\cap_{j\in J}O_j$ est ouvert. Pour tout $x\in\cap_{j\in J}O_j$ on a $x\in O_j$ pour tout $j\in J$. Il existe donc $r_j>0$ tel que $B_d(x,r_j)\subset O_j$ pour tout $j\in J$. Soit $r=\min\{r_j\mid j\in J\}>0$. On observe alors que $B_d(x,r)\subset\cap_{j\in J}O_j$. Donc $\cap_{j\in J}O_j$ est ouvert.

ii) Les affirmations sur les fermés se démontrent par passage au complémentaire.

□

Remarque 1.5.11. Une intersection infinie d'ouverts n'est pas toujours un ouvert (idem pour une union infinie de fermés)! Par exemple, dans $(\mathbb{R}, |\ |)$, on a

$$\bigcap_{k\geq 1} \left]-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right[= \{0\} \subset \mathbb{R}.$$

Corollaire 1.5.12. *Les ouverts de X sont les réunions de boules ouvertes.*

1.6 Intérieur et adhérence d'une partie

Soit (X, d) un espace métrique E une partie de X.

Définition 1.6.1. *On appelle* **intérieur** *de E, noté $\mathring{E}$, la réunion de toutes les parties ouvertes de X incluses dans E. Si on note $\mathcal{O}_E$ l'ensemble des parties ouvertes de X incluses dans E, on a ainsi*

$$\mathring{E} := \bigcup_{O\in\mathcal{O}_E} O.$$

Remarque 1.6.2. Noter que E contient toujours au moins une partie ouverte de E puisque $\emptyset \in \mathcal{O}_E$. La Proposition 1.5.10 assure que $\mathring{E}$ est une partie ouverte. Ainsi, $\mathring{E}$ est la plus grande partie ouverte contenue dans E. Évidemment, $E = \mathring{E}$ si et seulement si E est une partie ouverte.

Avec le théorème suivant, on montre que l'intérieur d'une partie E est bien l'ensemble de tous les points intérieurs à E.

Théorème 1.6.3. *Soit (X, d) un espace métrique, $E \subseteq X$. Soit $\tilde{E}$ l'ensemble de tous les points intérieurs à E. Alors*

$$\mathring{E} = \tilde{E}.$$

Preuve. Tout d'abord, on remarque que $\tilde{E} \subseteq E$.

Montrons d'abord que $\mathring{E} \subseteq \tilde{E}$. Pour tout $y \in \mathring{E}$, il existe un élement O de la famille $\mathcal{O}_E$ tel que $y \in O$. Il existe donc $r > 0$, $B_d(y, r) \subseteq O \subseteq E$ (car O ouvert et $O \subseteq E$!). Donc y est un point intérieur à E, c'est-à-dire $y \in \tilde{E}$.

Montrons à présent que $\tilde{E} \subseteq \mathring{E}$. Soit $y \in \tilde{E}$, autrement dit, soit y un point intérieur à E. Il existe donc $r > 0$ tel que $B_d(y, r) \subseteq E$. La boule $B_d(y, r)$ est ouverte et contenue dans E, donc $B_d(y, r) \in \mathcal{O}_E$. Il suit que $B_d(y, r) \subset \mathring{E}$ et donc $y \in \mathring{E}$.

□

De manière analogue, on travaille avec les parties fermées.

Définition 1.6.4. *On appelle* **adhérence** *de E, notée $\overline{E}$, l'intersection de tous les fermés de X contenant E. Autrement dit, si on note $\mathcal{F}_E$ l'ensemble des parties fermées de X contenant E, on a*

$$\overline{E} := \bigcap_{F\in\mathcal{F}_E} F.$$

Remarque 1.6.5. Noter que la famille $\mathcal{F}_E$ n'est jamais vide car $X \in \mathcal{F}_E$. La Proposition 1.5.10 assure que $\overline{E}$ est une partie fermée. Ainsi $\overline{E}$ est la plus petite partie fermée qui contient E. Évidemment, $E = \overline{E}$ si et seulement si E est une partie fermée.

Avec le théorème suivant, on montre que l'adhérence d'une partie E est bien l'ensemble de tous les points adhérents à E.

Théorème 1.6.6. *Soit (X,d) un espace métrique, $E \subseteq X$. Soit E' l'ensemble de tous les points adhérents à E. Alors*
$$\overline{E} = E'.$$

Preuve. Tout d'abord, on remarque que $E \subseteq E'$.

Montrons que $E' \subseteq \overline{E}$. Soit $y \in E'$ et $F \in \mathcal{F}_E$, c'est-à-dire une partie fermée de X telle que $E \subseteq F$. Comme y est un point adhérent à E, pour tout $r > 0$, on peut trouver $y_0 \in B_d(y,r) \cap E \subseteq B_d(y,r) \cap F$. Donc y est un point adhérent à F. Comme F est fermé, on en déduit que $y \in F$. Ceci étant vrai pour tout $F \in \mathcal{F}_E$, on en déduit que $y \in \overline{E}$.

Montrons maintenant que $\overline{E} \subseteq E'$. Passons au complémentaire, et montrons que $X \setminus E' \subseteq X \setminus \overline{E}$. Soit $x \in X \setminus E'$, c'est-à-dire que x n'est pas adhérent à E. On peut donc trouver $r > 0$ tel que $B(x,r) \cap E = \emptyset$. Comme $B(x,r)$ est ouvert, son complémentaire $X \setminus B(x,r)$ est fermé. De plus, il contient E puisque $B(x,r) \cap E = \emptyset$. Donc $X \setminus B(x,r) \in \mathcal{F}_E$ et donc $\overline{E} \subseteq X \setminus B(x,r)$. Et donc $B(x,r) \cap \overline{E} = \emptyset$. Donc $x \in X \setminus \overline{E}$. □

Remarque 1.6.7. En récapitulant, on a $\mathring{E} \subseteq E \subseteq \overline{E}$.

Proposition 1.6.8. *Soit (X,d) un espace métrique, $E \subseteq X$ et $F \subseteq X$. Alors*

i) $\mathring{X} = X$ *et* $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

ii) $X \setminus \overline{E} = \overset{\circ}{\overline{X \setminus E}}$ *et* $X \setminus \mathring{E} = \overline{X \setminus E}$.

iii) Si $F \subseteq E$ *alors* $\mathring{F} \subseteq \mathring{E}$ *et* $\overline{F} \subseteq \overline{E}$.

iv) $\mathring{\mathring{E}} = \mathring{E}$ *et* $\overline{\overline{E}} = \overline{E}$.

v) $\overset{\circ}{\overline{F \cap E}} = \mathring{F} \cap \mathring{E}$ *et* $\mathring{F} \cup \mathring{E} \subseteq \overset{\circ}{\overline{F \cup E}}$.

vi) $\overline{F \cup E} = \overline{F} \cup \overline{E}$ *et* $\overline{F \cap E} \subseteq \overline{F} \cap \overline{E}$.

Preuve. Exercice ! □

Exemple 1.6.9. Dans $(X, \| \, \|)$ espace vectoriel normé, soit $x_0 \in X$ et $r > 0$. On note d la distance définie par la norme $d(x,y) = \|x - y\|$, pour tout $x, y \in X$.

a) L'intérieur de $\overline{B}_d(x_0,r)$ est la boule ouverte $B_d(x_0,r)$.
En effet, d'une part $B_d(x_0,r)$ est un ouvert contenu dans $\overline{B}_d(x_0,r)$. D'autre part, il faut montrer que cet ouvert est le plus grand contenu dans $\overline{B}_d(x_0,r)$ (i.e. $B_d(x_0,r)$ contient tous les ouverts contenus dans $\overline{B}_d(x_0,r)$). Imaginons par l'absurde qu'il existe un ouvert O de $\overline{B}_d(x_0,r)$ qui ne soit pas contenu dans $B_d(x_0,r)$. Il existe ainsi $x \in O \subset \overline{B}_d(x_0,r)$ tel que $x \notin B_d(x_0,r)$, i.e. $\|x_0 - x\| = r$. O étant ouvert, il existe $r' > 0$ tel que $B_d(x,r') \subset O \subset \overline{B}_d(x_0,r)$. Considèrant le point $y := x - \frac{r'}{2}\frac{x_0 - x}{\|x_0 - x\|}$, on a $\|x - y\| = \frac{r'}{2} < r'$ donc $y \in B_d(x,r') \subset O$ et

$$\|x_0 - y\| = \left\| x_0 - x + \frac{r'}{2}\frac{x_0 - x}{\|x_0 - x\|} \right\| = \left(1 + \frac{r'}{2r}\right) r > r$$

d'où $y \notin \overline{B}_d(x_0,r)$, ce qui est absurde puisque $O \subset \overline{B}_d(x_0,r)$.

b) L'adhérence de $B_d(x_0,r)$ est bien la boule fermée $\overline{B}_d(x_0,r)$.
En effet, d'une part $\overline{B}_d(x_0,r)$ est un fermé contenant $B_d(x_0,r)$. D'autre part, il faut montrer que ce fermé est le plus petit contenant $B_d(x_0,r)$ (i.e. $\overline{B}_d(x_0,r)$ est contenu dans tous les fermés contenant $B_d(x_0,r)$). Imaginons par l'absurde que il existe F fermé, tel que $B_d(x_0,r) \subset F$ et $\overline{B}_d(x_0,r)$ ne soit pas contenu dans F. Par conséquent, il existe $x \in \overline{B}_d(x_0,r)$ tel que $x \notin F$, et donc $x \notin B_d(x_0,r) \subset F$, i.e. $\|x_0 - x\| = r$. Or F^c ouvert, il existe $r' > 0$ tel que $B_d(x,r') \subset F^c$.

On considère, pour tout $0 < \ell < r'$, le point $y := x + \ell \frac{x_0 - x}{\|x_0 - x\|}$, on a $\|x - y\| = \ell < r'$ donc $y \in B_d(x, r') \subset F^c$, i.e. $y \notin F$ et

$$\|x_0 - y\| = \|x_0 - x - \ell \frac{x_0 - x}{\|x_0 - x\|}\| = \left(1 - \frac{\ell}{r}\right) r < r$$

pour ℓ assez petit. Par conséquent, $y \in B_d(x_0, r)$, mais $y \notin F$, ce qui est absurde puisque $B_d(x_0, r) \subset F$.

Exemple 1.6.10. Soit (X, d) un espace métrique où X est un ensemble quelconque non vide et d est la distance discrète définie dans l'Exemple 1.1.5. Pour tout $x \in X$, on a que $B_d(x, 1) = \{x\}$ n'est pas l'intérieur de $\overline{B}_d(x, 1) = X$ ($\overline{B}_d(x, 1)$ étant fermé et ouvert, il est son propre intérieur). De plus $\overline{B}_d(x, 1) = X$ n'est pas l'adhérence de $B_d(x, 1) = \{x\}$ ($B_d(x, 1)$ étant fermé et ouvert, il est égal à son adhérence). Voir Exemples 1.3.3 et 1.5.8.

Exemple 1.6.11. Dans $(\mathbb{R}, |\ |)$, on a

$$\begin{aligned} &\overset{\circ}{[a, b]} =]a, b[, \quad \overline{[a, b]} = [a, b], \quad \overset{\circ}{]a, b[} =]a, b[, \quad \overline{]a, b[} = [a, b], \\ &\overset{\circ}{[a, b[} =]a, b[, \quad \overline{[a, b[} = [a, b], \quad \overset{\circ}{]a, b]} =]a, b[, \quad \overline{]a, b]} = [a, b]. \end{aligned}$$

Le même raisonnement s'applique aux intervalles non bornées.

Dans l'Exemple 1.4.9, $E =]a, b[\cup \{c\} \cup [d, +\infty[$ alors $\overset{\circ}{E} =]a, b[\cup]d, +\infty[$ et $\overline{E} = [a, b] \cup \{c\} \cup [d, +\infty[$.

Exemple 1.6.12. Soit (X, d) un espace métrique où X est un ensemble quelconque non vide et d est la distance discrète définie dans l'Exemple 1.1.5. Soit E une partie de X alors $\overset{\circ}{E} = \overline{E} = E$, (voir l'Exemple 1.5.8).

Proposition 1.6.13. Dans $(\mathbb{R}, |\ |)$, soit $E \subseteq \mathbb{R}$ non vide, majoré (ou minoré). Alors $\sup\{x \in E\} \in \overline{E}$ (resp. $\inf\{x \in E\} \in \overline{E}$).

Rappel : $E \subseteq \mathbb{R}$ non vide, majoré s'il existe un majorant, i.e. $\exists y \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in E, x \leq y$ (resp. minoré s'il existe un minorant, i.e. $\exists y \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in E, x \geq y$.)
$\sup\{x \in E\}$ est le plus petit des majorants (resp. $\inf\{x \in E\}$ est le plus grand des minorants).

Preuve. Soit $E \subseteq \mathbb{R}$ non vide, majoré. On a alors $y := \sup\{x \in E\} < +\infty$. De plus par caractérisation de borne supérieure (cf. le cours d'Analyse 1), pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in E$ tel que $x > y - \varepsilon$, i.e. $d(y, x) = |y - x| < \varepsilon$, donc y est un point d'adhérence pour E et $y \in \overline{E}$. Le raisonnement est analogue pour la borne inférieure. □

1.6.1 Frontière d'une partie, parties d'intérieur vide et parties denses

En utilisant les notions d'intérieur et d'adhérence à une partie, on peut définir la notion suivante.

Définition 1.6.14. *On appelle* **frontière** *de E la partie ∂E définie par*

$$\partial E := \overline{E} \setminus \overset{\circ}{E}.$$

Avec la proposition suivante, on montre que la frontière d'une partie E est bien l'ensemble de tous les points de frontière de E.

Proposition 1.6.15. *Soit (X, d) un espace métrique, $E \subseteq X$. Soit E^* l'ensemble de tous les points de frontière de E. Alors*

$$\partial E = E^*.$$

Preuve. C'est une conséquence immédiate de la Définition 1.4.12. $\square$

Exemple 1.6.16. Dans $(\mathbb{R}, |\ |)$, on a

$$\partial[a,b] = \partial]a,b] = \partial[a,b[= \partial]a,b[= \{a,b\}.$$

Dans l'Exemple 1.4.9, $E =]a,b[\cup \{c\} \cup [d,+\infty[$ et alors $\partial E = \{a,b,c,d\}$.

Exemple 1.6.17. Soit (X,d) un espace métrique, où X est un ensemble quelconque non vide et d est la distance discrète définie dans l'Exemple 1.1.5. Soit E une partie de X. Alors $\partial E = \emptyset$, (voir l'Exemple 1.6.12).

Définition 1.6.18. *Soit $E \subseteq X$ une partie de X on dit que E est* **dense dans** X *(ou dans (X,d)) lorsque X est la plus petite partie fermée contenant E, c'est-à-dire lorsque $\overline{E} = X$. Soient $E \subseteq V \subseteq X$ deux parties de X, on dit que E est* **dense dans** V *lorsque E est dense dans (V, d_V) où d_V est la distance induite.*

Remarque 1.6.19. $E \subseteq X$ est dense dans $\overline{E}$.

Exemple 1.6.20. Dans $(\mathbb{R}, |\ |)$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont parties denses dans $\mathbb{R}$, mais $\mathbb{Z}$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$.

Remarque 1.6.21. Soient $E \subseteq V \subseteq X$ deux parties de X, alors E est dense dans V si et seulement si $\overline{E} \cap V = V$, i.e. $\forall x \in V$, x est adhérent à E, i.e.

$$\forall x \in V,\ \forall r > 0,\ \exists y \in B_d(x,r) \cap E.$$

Définition 1.6.22. *On dit qu'une partie E est* **d'intérieur vide** *lorsqu'elle ne contient pas de partie ouverte non vide, c'est-à-dire lorsque $\mathring{E} = \emptyset$.*

Exemple 1.6.23. Dans (X,d), $\emptyset$ est d'intérieur vide.

Dans $(\mathbb{R}, |\ |)$ tout singleton $\{x\}$ est d'intérieur vide, alors que dans $(\mathbb{R}, d)$ où d est la distance discrète, comme $\{x\}$ est ouvert, il n'est pas d'intérieur vide, son intérieur est $\{x\}$ lui-même.

Proposition 1.6.24. *Une partie E est d'intérieur vide si et seulement si E^c est dense in X.*

Preuve. $\mathring{E} = \emptyset \iff X \setminus \mathring{E} = X \iff \overline{X \setminus E} = X$ où on a utilisé la Proposition 1.6.8-*ii*). La proposition découle du fait que $X \setminus E = E^c$. $\square$

1.7 Parties bornées et diamètre d'une partie

Soit (X,d) un espace métrique et E une partie de X.

Définition 1.7.1. *La partie E est dite* **bornée** *si elle est contenue dans une boule ouverte, i.e.*

$$\exists x_0 \in X, r > 0 \quad t.q.\ E \subseteq B_d(x_0, r).$$

Proposition 1.7.2. *Une union finie de parties bornées de (X,d) est une partie bornée de (X,d).*

Preuve. Soient E_i, pour $i = 1, \ldots, m$, des parties bornées de (X,d). Alors, pour tout $i = 1, \ldots, m$ on peut trouver $x_i \in E_i$ et $r_i > 0$ tels que $E_i \subset B_d(x_i, r_i)$. Il s'ensuit que

$$\bigcup_{i=1}^{m} E_i \subseteq B_d(x_1, r),$$

où $r = \max_{i=1,\ldots,m}(r_i + d(x_1, x_i))$.

$\square$

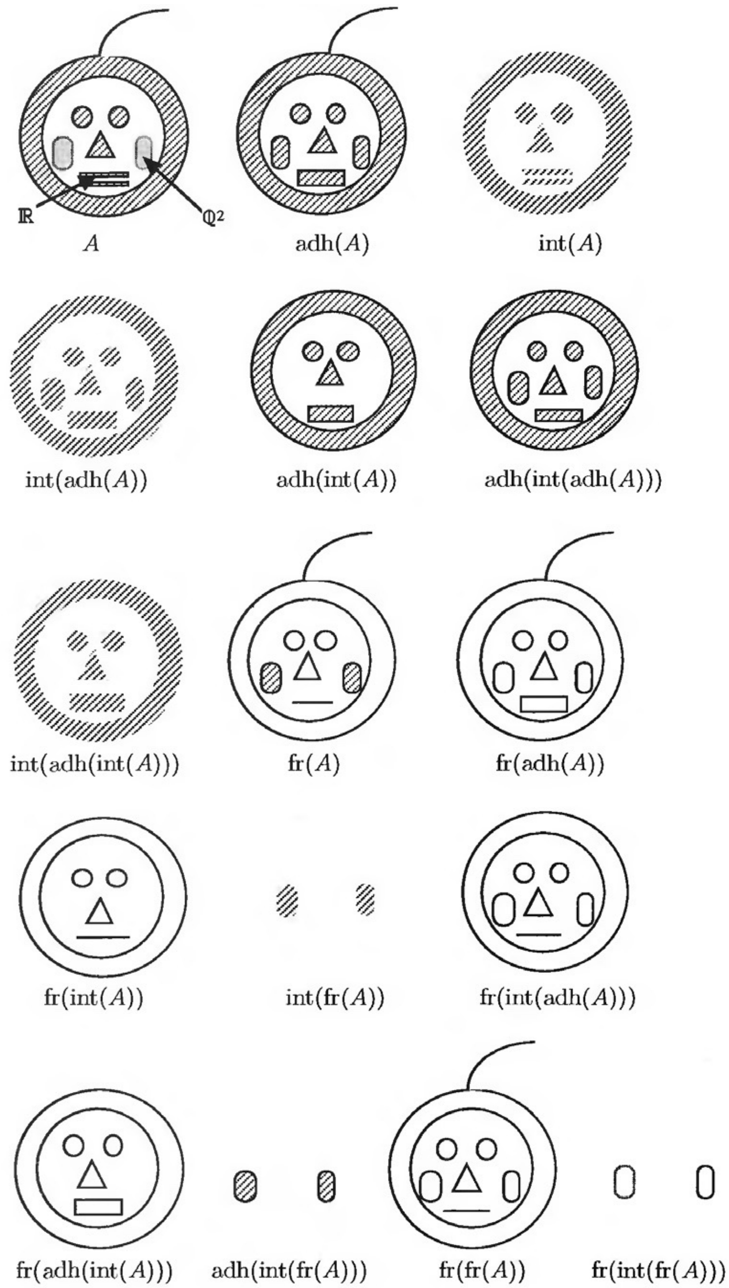

Figure 2: Exemple dans $\mathbb{R}^2$

Proposition 1.7.3. *Soit $(X, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé. Une partie E de X est une partie bornée si et seulement s'il existe $M > 0$ tel que $\|x\| < M$ pour tout $x \in E$.*

Preuve. $\Rightarrow$ Soit $E \subset X$ une partie bornée, alors il existe $r > 0$ et $y \in X$ tel que $E \subseteq B_{d_{\| \ \|}}(y, r)$, i.e. pour tout $x \in E$, $\|x - y\| < r$. Or, pour tout $x \in E$,

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

donc $\|x\| \leq r + \|y\| =: M$.

$\Leftarrow$ Supposons qu'il existe $M > 0$ tel que $\|x\| < M$ pour tout $x \in E$. Alors $E \subseteq B_{d_{\| \ \|}}(0, M)$. Donc E est bornée.

□

Définition 1.7.4. *Si E est une partie de (X, d), on appelle* **diamètre** *de E*

$$\mathrm{diam}(E) := \sup\{d(x, y) \mid x, y \in E\}.$$

Théorème 1.7.5. *Soit (X, d) un espace métrique, $E \subseteq X$, $E \neq \emptyset$. Alors*

i) $\mathrm{diam}E = 0$ *si et seulement si* $E = \{x_0\}$, $x_0 \in X$*;*

ii) $\mathrm{diam}E < +\infty$ *si et seulement si E est une partie bornée;*

iii) si $E \subseteq F$*, alors* $\mathrm{diam}E \leq \mathrm{diam}F$*;*

iv) $\mathrm{diam}\mathring{E} \leq \mathrm{diam}E = \mathrm{diam}\overline{E}$.

Preuve. *i)* Soit $E = \{x_0\}$, $x_0 \in X$. Alors

$$\mathrm{diam}E = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in E\} = d(x_0, x_0) = 0.$$

Réciproquement, s'il existe deux points distincts de E, disons x_0 et y_0, alors $\mathrm{diam}E \geq d(x_0, y_0) > 0$.

ii) Si $\mathrm{diam}E < +\infty$, soit $x_0 \in E$. Pour tout $y \in E$ on a

$$d(x_0, y) \leq \sup\{d(x, y) \mid x, y \in E\},$$

c'est-à-dire $E \subseteq B_d(x_0, r)$ avec $r > \mathrm{diam}E$. Donc E est une partie bornée.

Réciproquement, si E est une partie bornée, il existe $x_0 \in X$ et $r > 0$ tel que $E \subseteq B_d(x_0, r)$. Donc

$$\mathrm{diam}E = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in E\} \leq 2r.$$

iii) Trivial.

iv) Comme $\mathring{E} \subseteq E \subseteq \overline{E}$ alors $\mathrm{diam}\mathring{E} \leq \mathrm{diam}E \leq \mathrm{diam}\overline{E}$. Donc si $\mathrm{diam}E = +\infty$ alors $\mathrm{diam}\overline{E} = +\infty$. On considère le cas $\mathrm{diam}E < +\infty$. Pour tout $a, b \in \overline{E}$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $x \in B_d(a, \varepsilon) \cap E$ et $y \in B_d(b, \varepsilon) \cap E$, donc

$$d(a, b) \leq d(a, x) + d(b, x) \leq d(a, x) + d(x, y) + d(b, y) \leq d(x, y) + 2\varepsilon.$$

En passant à la borne supérieure, il vient

$$d(a, b) \leq \mathrm{diam}E + 2\varepsilon.$$

Donc $\mathrm{diam}\overline{E} \leq \mathrm{diam}E + 2\varepsilon$ et ε étant arbitraire, $\mathrm{diam}\overline{E} \leq \mathrm{diam}E$. Il s'ensuit que $\mathrm{diam}\overline{E} = \mathrm{diam}E$

□

Exemple 1.7.6. Dans l'Exemple 1.4.9, E n'est pas borné donc diam$E = +\infty$.

Dans l'Exemple 1.5.6, $[a, b[,]a, b[,]a, b], [a, b]$ sont des parties bornées de diamètre égal à $b - a$.

Dans l'Exemple 1.5.7, E est une partie bornée (E est contenue dans $B_d((0, 0), 5)$). Calculez son diamètre !

Exemple 1.7.7. Soit (X, d) un espace métrique où X est un ensemble quelconque non vide et d est la distance discrète définie dans l'Exemple 1.1.5. Toute partie E de X est bornée, et X de même. De plus, diam$E = 0$ si E est un singleton et diam$E = 1$ si E contient au moins deux éléments de X.

1.8 Suites: convergence, unicité de la limite, etc.

Soit X un ensemble non vide.

Définition 1.8.1. *Une* **suite à valeurs dans** X *est une application* $x : \mathbb{N} \to X$. *On note* $x_n := x(n)$ *un terme de la suite et* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite.*

Pour étudier le caractère borné et la convergence d'une suite, on se place dorénavant dans un espace métrique (X, d).

Définition 1.8.2. *On dit qu'une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* **bornée** *si l'ensemble de ses valeurs* $E := \{x_n,\ n \in \mathbb{N} \dots\}$ *est une partie bornée de* X.

Définition 1.8.3. *On dit qu'une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers** $y \in X$ *lorsque pour tout voisinage* V *de* y,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ t.q.\ \forall n \geq n_0, x_n \in V,$$

ce qui équivaut à

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N},\ t.q.\ \forall n \geq n_0,\ x_n \in B_d(y, \varepsilon),$$

ou encore

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N},\ t.q.\ \forall n \geq n_0,\ d(x_n, y) < \varepsilon.$$

L'élément y *est appelé* **limite** *de la suite et on écrit*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = y, \quad ou \quad x_n \to y \text{ pour } n \to +\infty.$$

Remarque 1.8.4. Dans un espace métrique (X, d), dire que $\lim_{n\to+\infty} x_n = y$ ne signifie pas autre chose que

$$\lim_{n\to+\infty} d(x_n, y) = 0.$$

Exemple 1.8.5. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **stationnaire** si elle est constante à partir d'un certain rang n_0, i.e.

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0,\ x_n = x_{n_0}.$$

Toute suite stationnaire est convergente, dans tout espace métrique.

Exemple 1.8.6. Dans un espace métrique muni de la distance discrète (voir exemples 1.1.5 et 1.5.8), seules les suites stationnaires sont convergentes. Par exemple dans $(\mathbb{R}, d)$, où d est la distance discrète, la suite donnée par $x_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$, ne converge pas !

On voit dans l'exemple ci-dessus que la notion de convergence d'une suite dépend de manière essentielle de la distance que l'on utilise. Cependant, deux distances équivalentes définissent les mêmes suites convergentes (Exercice)!

Théorème 1.8.7 (Unicité de la limite)**.** *Soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite dans* (X,d)*. Si*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = y_1 \quad et \quad \lim_{n\to+\infty} x_n = y_2,$$

alors $y_1 = y_2$*.*

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. En utilisant les convergences, on peut trouver deux entiers naturels n_1 et n_2 tels que

$$\forall n \geq n_1,\ x_n \in B_d(y_1, \varepsilon/2) \ \text{ et } \ \forall n \geq n_2,\ x_n \in B_d(y_2, \varepsilon/2).$$

Donc en posant $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$ on a

$$d(y_1, y_2) \leq d(y_1, x_{n_0}) + d(x_{n_0}, y_2) \leq \varepsilon$$

. Comme ε est arbitraire, on en déduit que $d(y_1, y_2) = 0$, et donc $y_1 = y_2$.

□

Théorème 1.8.8. *Une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergente dans* (X,d) *est une suite bornée.*

Preuve. Appelons y la limite d'une telle suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En utilisant la définition de la convergence avec $\varepsilon = 1$, on peut trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $d(x_n, y) < 1$. Soit

$$M := \max\{1, d(x_0, y), \ldots, d(x_{n_0-1}, y)\}.$$

Alors pour tout $n \in N$, on a

$$d(x_n, y) < M + 1.$$

Donc $E := \{x_k,\ k \in \mathbb{N}\} \subseteq B_d(y, M+1)$ est une partie bornée. □

Remarque 1.8.9. Une suite bornée n'est pas forcement convergente ! On se rappellera l'exemple de la suite de terme général $x_n = (-1)^n$ dans $(\mathbb{R}, |\ |)$.

1.8.1 Caractérisation séquentielle d'une partie fermée et d'une partie dense

Théorème 1.8.10. *Soit* (X,d) *un espace métrique et* E *une partie non vide de* X*.*

i) Soit $y \in X$*. Alors* $y \in \overline{E}$ *si et seulement s'il existe une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de points de* E *telle que* $x_n \to y$ *lorsque* $n \to +\infty$*.*

ii) E *est une partie fermée si et seulement si toute suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de points de* E *qui converge dans* (X,d) *a sa limite dans* E*.*

Preuve. *i)* $\Rightarrow$ Soit $y \in \overline{E}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $B_d(y, \frac{1}{n+1}) \cap E$. On peut ainsi introduire un point x_n dans cette intersection. En procédant ainsi pour tous les entiers n, on peut donc déterminer toute une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Cette suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de E et $d(x_n, y) < \frac{1}{n+1}$, d'où $\lim_{n\to+\infty} x_n = y$.

$\Leftarrow$ Réciproquement, soit $y \in X$ tel qu'il existe une suite de points de E, disons $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telle que $x_n \to y$ quand $n \to +\infty$. Pour tout $r > 0$, on peut trouver n_0 tel que $\forall n \geq n_0$, $x_n \in B_d(y, r)$, d'où $B_d(y, r) \cap E \neq \emptyset$ et donc $y \in \overline{E}$.

ii) $\Rightarrow$ Soit E fermé. Alors $E = \overline{E}$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de E et $y \in X$ sa limite. Alors par le point *i)* on a $y \in \overline{E} = E$.

$\Leftarrow$ Réciproquement, supposons que toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente de E ait sa limite dans E. On veut montrer que $E = \overline{E}$. Il suffit de montrer $\overline{E} \subseteq E$. Soit $y \in \overline{E}$, par le *i)* il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E telle que $x_n \to y$ quand $n \to +\infty$; l'hypothèse nous permet alors d'affirmer que $y \in E$.

□

Proposition 1.8.11. *Soient $E \subseteq V \subseteq X$ deux parties de X. Alors E est dense dans V si et seulement si tout point $x \in V$ est limite d'une suite de E.*

Preuve. Le résultat découle du Théorème 1.8.10-i). □

1.8.2 Suites extraites, valeurs d'adhérence.

Définition 1.8.12. *Soit (x_n) une suite. Une* **suite extraite** *ou* **sous-suite** *de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une application $x \circ \phi : \mathbb{N} \to X$ où $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante. On note $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ la suite extraite. Parfois, on notera une sous-suite plus simplement (x_{n_j}) avec $n_j \in \mathbb{N}$.*

On dit que $y \in X$ est une **valeur d'adhérence** *de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, s'il existe une sous-suite $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers y dans (X, d).*

Remarque 1.8.13. On remarque que $y \in X$ est valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.q } n_0 \geq n \text{ et } d(x_{n_0}, y) < \varepsilon.$$

Une suite convergente dans un espace métrique n'a qu'une seule valeur d'adhérence : sa limite (qui est unique !). Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente vers la même limite.

Cependant, une suite avec une seule valeur d'adhérence ne converge pas forcément. Exemple : Dans $(\mathbb{R}, |\ |)$, la suite de terme général $x_{2n} = 1, x_{2n+1} = n, n \in \mathbb{N}$.

Exemple 1.8.14. Dans $(\mathbb{R}, |\ |)$, la suite de terme général $x_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$ possède deux valeurs d'adhérence et deux seulement -1 (limite de la sous-suite $(x_{2n+1}), n \in \mathbb{N}$) et 1 (limite de la sous-suite $(x_{2n}), n \in \mathbb{N}$).

La suite de terme général $x_n = n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, n'a aucune valeur d'adhérence.

Théorème 1.8.15. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de (X, d).*

i) Une condition nécessaire pour que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $y \in X$ est que chaque sous-suite converge vers y.

ii) Une condition suffisante pour que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $y \in X$ est que de chaque sous-suite $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ on puisse extraire une sous-sous-suite $(x_{\psi(\phi(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers y.

Preuve. i) Supposons que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y ; soit $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. L'extraction ϕ étant strictement croissante, elle satisfait que la propriété $\forall n \in \mathbb{N},\ \phi(n) \geq n$ (voir le cours d'Analyse 1, c'est une récurrence facile). Ainsi on passe facilement de

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \text{t.q. } \forall n \geq n_0,\ d(x_n, y) < \varepsilon,$$

à

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \text{t.q. } \forall n \geq n_0,\ d(x_\phi(n), y) < \varepsilon,$$

en prenant pour chaque ε le même n_0.

ii) Pour la condition suffisante on procède par l'absurde. Supposons $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers y. Soit $\varepsilon > 0$ tel que pour tout k il existe $n_k \geq k$ tel que $d(x_{n_k}, y) \geq \varepsilon$. Soit $k = 1$; on peut donc introduire $n_1 \geq 1$ tel que $d(x_{n_1}, y) \geq \varepsilon$. Soit maintenant $k = n_1 + 1$; on introduit $n_2 \geq n_1 + 1$ tel que $d(x_{n_2}, y) \geq \varepsilon$. En procédant ainsi de manière récurrente, on construit une sous-suite (x_{n_j}) avec $n_j \in \mathbb{N}$

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots$$

telle que $d(x_{n_1}, y) \geq \varepsilon$, $d(x_{n_2}, y) \geq \varepsilon$, $d(x_{n_3}, y) \geq \varepsilon$, etc. Alors aucune sous-sous-suite convergente vers y ne peut être extraite de la sous-suite (x_{n_j}), car elle se maintient toujours en dehors de $B_d(y, \varepsilon)$. On tombe donc sur une contradiction.

□

On montre maintenant un résultat qui concerne les suites dans $(\mathbb{R}^n, \| \|_\infty)$ et qui généralise un résultat vrai dans $(\mathbb{R}, | |)$. On verra plus tard, Corollaire 2.2.16, que le Théorème de Bolzano-Weierstrass est vrai dans n'importe quel espace vectoriel normé de *dimension finie*.

Théorème 1.8.16 (Théorème de Bolzano-Weierstrass dans $(\mathbb{R}^n, \| \|_\infty)$)**.** *Toute suite bornée de $(\mathbb{R}^n, \| \|_\infty)$ admet (au moins) une valeur d'adhérence.*

Preuve. Pour $n = 1$, nous renvoyons au cours d'Analyse 1. Supposons maintenant $n \geq 2$. On indique ici les coordonnées d'un point $y \in \mathbb{R}^n$ par un exposant, i.e. $y = (y^1, \dots, y^n)$. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $(\mathbb{R}^n, \| \|_\infty)$. On va extraire une sous-suite convergente de la suite en n étapes. Puisque la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée pour la norme $\| \|_\infty$ (i.e. $\exists M > 0$ tel que $\|x_k\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_k^i| < M$, pour tout $k \geq 0$), la suite réelle $(x_k^1)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée (car $|x_k^1| < M$, pour tout $k \geq 0$). Donc il existe une sous-suite convergente $(x^1_{\phi_1(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ de la suite $(x_k^1)_{k\in\mathbb{N}}$, par Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}$. Ainsi $(x_{\phi_1(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de (x_k) dont la première composante converge. On peut alors répéter le procédé: la suite $(x^2_{\phi_1(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée, et donc on peut en extraire une sous-suite $(x^2_{\phi_1\circ\phi_2(k)})_{k\in\mathbb{N}}$, de sorte que la deuxième composante converge aussi. Notons alors que $(x_{\phi_1\circ\phi_2(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, dont les deux premières composantes convergent. En procédant de la sorte n fois, on trouve une sous suite telle que toutes les composantes convergent. On obtient ainsi une sous-suite convergente pour la norme $\| \|_\infty$. □

1.9 Applications continues

Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques et $f : X \to Y$ une application. On rappelle la notation : pour tout partie $V \subset Y$ on denote $f^{-1}(V) := \{x \in X \mid f(x) \in V\}$ l'image réciproque ou préimage de V.

Définition 1.9.1. *Soit $x_0 \in X$ et $y \in Y$. On dit que f* **tend vers** *y en x_0 lorsque, pour tout voisinage V de y, $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x_0, i.e.*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\eta > 0 \text{ t.q. } B_d(x_0, \eta) \subset f^{-1}(B_\delta(y, \varepsilon)),$$

ce qui équivaut à

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\eta > 0 \text{ t.q. } \forall x \in B_d(x_0, \eta), f(x) \in B_\delta(y, \varepsilon),$$

et aussi à

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\eta > 0 \text{ t.q. } \forall x \in X,\ d(x, x_0) < \eta,\ \delta(f(x), y) < \varepsilon.$$

Dans ce cas, on dit que y est la **limite** *de f et on écrit*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y, \quad ou \quad f(x) \to y \text{ pour } x \to x_0,$$

Remarque 1.9.2. De manière équivalente, on peut aussi dire que f tend vers y en x_0 si

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\eta > 0 \text{ t.q. } \forall x \in X,\ d(x, x_0) \leq \eta \Rightarrow \delta(f(x), y) \leq \varepsilon.$$

Théorème 1.9.3 (Caractérisation séquentielle)**.** *Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques, $f : X \to Y$ une application, x_0 un point de X et y un point de y. Les assertion suivantes sont équivalentes :*

i) f tend vers y au point x_0.

ii) Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de (X, d) convergente vers x_0, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans (Y, δ) vers y.

Preuve. Commençons par l'implication $i) \Rightarrow ii)$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de (X,d) qui convergente vers x_0. Alors pour $\varepsilon > 0$, on peut trouver un $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in X, d(x,x_0) < \eta,\ \delta(f(x),y) < \varepsilon.$$

Or pour ce η, on peut trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0\ d(x_n,x_0) < \eta$. D'où $\delta(f(x_n),y)) < \varepsilon$. On a donc établi que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N \text{ t.q. } \forall n \geq n_0,\ \delta(f(x_n),y) < \varepsilon.$$

Pour l'autre implication, on procède par contraposée : on montre donc non $i)$ implique non $ii)$. Supposons que f ne tende pas vers y au point x_0. Alors on peut trouver un certain $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall \eta > 0\ \exists x \in X, d(x,x_0) < \eta,\ \delta(f(x),y) \geq \varepsilon,$$

On peut donc construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \geq 1,\ d(x_n,x_0) < \frac{1}{n+1}$ et $\delta(f(x_n),y) \geq \varepsilon$. (Il suffit pour cela d'utiliser, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la phrase précédente avec $\eta = \frac{1}{n+1}$.) On a alors $x_n \to x_0$ lorsque $n \to +\infty$ mais $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas converger vers y. □

On a le résultat suivant pour ce qui est de la composition des limites.

Proposition 1.9.4. *Soient (X_1,d_1), (X_2,d_2) et (X_3,d_3) trois espaces métriques. $f : X_1 \to X_2$ et $g : X_2 \to X_3$ deux applications. On considère trois points $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$ et $x_3 \in X_3$. Si f tend vers x_2 au point x_1 que que g tend vers x_3 au point x_2 alors la composée $g \circ f : X_1 \to X_3$ tend vers x_3 au point x_1.*

Preuve. Comme f tend vers x_2 au point x_1, pour tout voisinage V de x_2 dans X_2, $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x_1 dans X_1. Comme g tend vers x_3 au point x_2, pour tout voisinage W de x_3 dans X_3, $g^{-1}(W)$ est un voisinage de x_2 dans X_2. On en déduit que pour tout voisinage W de x_3 dans X_3, $f^{-1}(g^{-1}(W)) = (g \circ f)^{-1}(W)$ est un voisinage de x_1 dans X_1. □

Dans le cas particulier d'un espace image qui est un espace vectoriel normé (ce qui inclut $(\mathbb{K}, |\ |)$ lui-mÃªme), on a aussi les propriétés suivantes.

Proposition 1.9.5. *Soient (X,d) un espace métrique, $(Y, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ et $f, g : X \to Y$ deux applications. Supposons que f tende vers $y_1 \in Y$ au point $x_0 \in X$ et et que g tende vers $y_2 \in Y$ au même point $x_0 \in X$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :*

i) $f + g \longrightarrow y_1 + y_2$ *et* $\lambda g \longrightarrow \lambda y_2$, *lorsque* $x \to x_0$.

ii) *Si* $(Y, \|\ \|) = (\mathbb{K}, |\ |)$, *alors* $fg \longrightarrow y_1 y_2$ *lorsque* $x \to x_0$. *Si de plus* $y_2 \neq 0$ *alors* $f/g \longrightarrow y_1/y_2$ *lorsque* $x \to x_0$.

Preuve. Utiliser la caractérisation séquentielle. □

Proposition 1.9.6. *Soient (X_1,d_1), (X_2,d_2) deux espaces métriques, $(Y, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ et $f : X_1 \to Y, g : X_2 \to Y$, deux applications. On suppose que f tend vers $\bar{y}_1 \in Y$ au point $\bar{x}_1 \in X_1$ et que g tend vers $\bar{y}_2 \in Y$ au point $\bar{x}_2 \in X_2$. Alors :*

i) $f(x_1) + g(x_2) \longrightarrow \bar{y}_1 + \bar{y}_2$ *lorsque* $(x_1,x_2) \to (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$.

ii) *Si* $(Y, \|\ \|) = (\mathbb{K}, |\ |)$, *alors* $f(x_1)g(x_2) \longrightarrow \bar{y}_1\bar{y}_2$ *lorsque* $(x_1,x_2) \to (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$. *Si de plus* $\bar{y}_2 \neq 0$ *alors* $f(x_1)/g(x_2) \longrightarrow \bar{y}_1/\bar{y}_2$ *lorsque* $(x_1,x_2) \to (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$.

Quand une fonction tend en un point vers sa valeur au point, on dira que l'application est continue en ce point.

Définition 1.9.7. *L'application f est* **continue** *en $x_0 \in X$ si f tend vers $f(x_0)$ au point x_0.*

Définition 1.9.8. *Soient* (X, d) *et* (Y, δ) *deux espaces métriques et* $f : X \to Y$ *une application. On dira que* f *est* **continue sur** $E \subseteq X$ *si elle est continue en tout point* x *de* E*. Pour souligner les métriques utilisées, on écrira parfois* $f : (X, d) \to (Y, \delta)$*.*

Exemple 1.9.9. Toute fonction $f : X \to Y$ d'un espace métrique X muni de la distance discrète d (voir exemples 1.1.5, 1.5.8) dans (Y, δ) espace métrique, est continue sur X. En effet, soit $f : X \to Y$, pour tout voisinage V de $f(x)$, $x \in X$, on a $x \in f^{-1}(V)$ et donc $\forall \varepsilon > 0$ il existe $B_d(x, \frac{1}{2}) = \{x\} \subset f^{-1}(B_\delta(f(x), \varepsilon))$. Donc f continue en x pour tout $x \in X$.

Proposition 1.9.10. *Soient* (X, d) *et* (Y, δ) *deux espaces métriques et* $f : X \to Y$ *une application. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

i) L'application f *est continue.*

ii) L'image réciproque $f^{-1}(O)$ *de toute partie ouverte* $O \subseteq Y$ *est une partie ouverte de* X*.*

iii) L'image réciproque $f^{-1}(F)$ *de toute partie fermée* $F \subseteq Y$ *est une partie fermée de* X*.*

Remarque 1.9.11. Noter que l'image directe par $f : X \to Y$ continue d'une partie ouverte de X n'est pas forcement une partie ouverte dans Y. Considérer par exemple une fonction constante $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour laquelle $f(\mathbb{R})$ est un singleton. De même l'image directe par $f : X \to Y$ continue d'une partie fermée de X n'est pas forcement une partie fermée dans Y. Considérer par exemple la fonction arctan : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour laquelle $\arctan(\mathbb{R}) =]-\pi/2, \pi/2[$ est un intervalle ouvert.

Preuve. Une partie $O \subseteq Y$ est ouverte si et seulement si son complémentaire $F = O^c \subseteq Y$ est une partie fermée. Donc *ii)* $\iff$ *iii)* suit du fait que $f^{-1}(O^c) = (f^{-1}(O))^c$.

i) $\Rightarrow$ *ii)* Supposons f continue. Soient $O \subseteq Y$ une partie ouverte et $x \in f^{-1}(O)$. La partie O étant ouverte contient une boule ouverte $B_\delta(f(x), \varepsilon)$ centrée en $f(x)$. De la continuité de f, il existe $\eta > 0$ tel que $B_d(x, \eta) \subset f^{-1}(B_\delta(f(x), \varepsilon)) \subset f^{-1}(O)$ et $f^{-1}(O)$ est donc ouvert.

ii) $\Rightarrow$ *i)* Réciproquement, supposons *ii)*. Soient $x \in X$ et $\varepsilon > 0$, considérons $B_\delta(f(x), \varepsilon) \subseteq Y$ une boule ouverte. Par notre hypothèse ii), $f^{-1}(B_\delta(f(x), \varepsilon))$ est une partie ouverte ; en outre $x \in f^{-1}(B_\delta(f(x), \varepsilon))$. Donc $f^{-1}(B_\delta(f(x), \varepsilon))$ contient une boule ouverte centrée en x, disons $B_d(x, \eta)$, pour un certain $\eta > 0$.

□

Des propositions 1.9.4, 1.9.5 et 1.9.6 on déduit les corollaires suivants.

Corollaire 1.9.12. *Soient* (X_1, d_1)*,* (X_2, d_2) *et* (X_3, d_3) *trois espaces métriques et* $f : X_1 \to X_2$ *et* $g : X_2 \to X_3$ *deux applications. Si* f *et* g *sont continues alors* $g \circ f$ *est continue.*

Corollaire 1.9.13. *Soient* (X, d) *un espace métrique,* $(Y, \| \ \|)$ *un espace vectoriel normé sur* $\mathbb{K}$ *et* $f, g : X \to Y$ *deux applications continues en* $x_0 \in X$*. Alors :*

i) $f + g$ *et* λg*,* $\lambda \in \mathbb{K}$*, sont continues en* x_0*.*

ii) Si $(Y, \| \ \|) = (\mathbb{K}, | \ |)$*, alors* fg *est continue en* x_0*. Si de plus* $g(x_0) \neq 0$ *alors* f/g *est continue en* x_0*.*

Corollaire 1.9.14. *Soient* (X_1, d_1)*,* (X_2, d_2) *deux espaces métriques,* $(Y, \| \ \|)$ *est un espace vectoriel normé sur* $\mathbb{K}$ *et* $f : X_1 \to Y, g : X_2 \to Y$*, deux applications. Soit* f *continue en* $\bar{x}_1 \in X_1$ *et* g *continue en* $\bar{x}_2 \in X_2$*. Alors :*

i) $h : X_1 \times X_2 \to Y$ *définie par* $h(x_1, x_2) := f(x_1) + g(x_2)$ *est continue en* $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$*.*

ii) Si $(Y, \| \ \|) = (\mathbb{K}, | \ |)$*, alors* $p : X_1 \times X_2 \to \mathbb{K}$ *définie par* $p(x_1, x_2) := f(x_1)g(x_2)$ *est continue en* $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$*. Si* $g(\bar{x}_2) \neq 0$ *alors* $q : X_1 \times X_2 \to \mathbb{K}$ *définie par* $q(x_1, x_2) := f(x_1)/g(x_2)$ *est continue en* $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$*.*

Remarque 1.9.15. Soient (X,d) et (Y,δ) deux espaces métriques et $f : X \to Y$ une application. Pour $E \subseteq X$, on définit la restriction $f|_E : E \to Y$ $f|_E(x) := f(x)$ $\forall x \in E$. Alors (Exercice !)

i) Si f est continue, alors $f|_E$ est continue.

ii) Si f est continue en $x \in E$, $f|_E$ est continue en $x \in E$.

iii) Si E est un voisinage de x dans X et $f|_E$ est continue en $x \in E$, alors f est continue en $x \in E$.

Ici, d_E est la distance induite, i.e. la restriction de la distance d à E, voir l'Exemple 1.1.10.
On peut traduire l'affirmation iii) par : la continuité est une propriété locale.

Comme dans le cas réel, on peut introduire une notion plus forte que la continuité, à savoir l'uniforme continuité.

Définition 1.9.16. *Soient (X,d) et (Y,δ) deux espaces métriques et $f : X \to Y$ une application. f est* **uniformément continue sur** $E \subseteq X$ *si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ t.q.\ \forall x_0 \in E,\ B_d(x_0,\eta) \subset f^{-1}(B_\delta(f(x_0),\varepsilon)).$$

Remarque 1.9.17. Dans la phrase précédente η ne dépend donc pas de x_0, alors que dans le cas de la continuité usuelle, on pourrait prendre un η dépendant du point. Donc clairement,la continuité uniforme sur E entraîne la continuité sur E.

Définition 1.9.18. *Soient (X,d) et (Y,δ) deux espaces métriques, $f : X \to Y$ une application, $K \geq 0$. f est* K**-Lipschitzienne** *si pour $x_1, x_2 \in X$:*

$$\delta(f(x_1), f(x_2)) \leq K d(x_1, x_2).$$

Remarque 1.9.19. Les applications K-Lipschitziennes sont uniformément continues. En particulier, elles sont évidement continues.

Exemple 1.9.20. Toutes les applications constantes de (X,d) dans (X,d) sont 0-Lipschitz.
L'application identité de (X,d) dans (X,d) est 1-Lipschitz.
La norme d'un espace vectoriel normé dans $\mathbb{R}$ est 1-Lipschitz.
Pour tout $y \in X$, la fonction $x \mapsto d(x,y)$ est 1-Lipschitz de (X,d) dans $\mathbb{R}$.
Pour tout $E \subseteq X$ non vide, la fonction $x \mapsto d(x,E)$ est 1-Lipschitz de (X,d) dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.9.21. *Soient (X,d) et (Y,δ) deux espaces métriques, $f : X \to Y$ une application, f est* **isométrique** *lorsqu'elle préserve les distances : i.e. pour tous $x_1, x_2 \in X$*

$$\delta(f(x_1), f(x_2)) = d(x_1, x_2).$$

Une **isométrie** *est une application bijective et isométrique.*

Remarque 1.9.22. Une application isométrique est 1-Lipschitz.

1.9.1 Homéormorphismes

Définition 1.9.23. *Soient (X,d) et (Y,δ) deux espaces métriques et $f : X \to Y$ une application. f est un* **homéomorphisme** *si elle est continue, bijective et que l'application réciproque est continue.*

Remarque 1.9.24. Dans ce cas l'application réciproque f^{-1} est aussi un homéomorphisme. Un homéomorphisme f transforme :

- les parties ouvertes de X en les parties ouvertes de Y;

- les parties fermées de X en les parties fermées de Y ;
- l'intérieur d'une partie de X en l'intérieur de la partie image de Y ;
- l'adhérence d'une partie de X en l'adhérence de la partie image de Y ;
- les suites convergentes dans X en des suites convergentes dans Y ;
- limite d'une suite dans X en la limite de la suite image dans Y ;
- les points d'adhérence d'une suite dans X en les points d'adhérence de la suite image dans Y.

et réciproquement ! **Attention** ! Un homéomorphisme ne transporte pas en général boules dans boules ni les parties bornées dans les parties bornées ! (voir Exemple 2.2.9)

Exemple 1.9.25. Soit X un ensemble et d, d_* deux distances équivalentes sur X (voir Définition 1.1.6), i.e. $\exists C_1, C_2 > 0$ t.q. $C_1 d(x,y) \leq d_*(x,y) \leq C_2 d(x,y)$ pour tout $x, y \in X$. L'application idéntité $i : (X,d) \to (X,d_*)$ est alors un homéomorphisme : elle est bien bijective et C_2-Lipschitzienne, alors que la réciproque i^{-1} est $\frac{1}{C_1}$-Lipschitzienne.

En particulier, dans $\mathbb{R}^n$, les parties ouvertes, fermées, les notions d'adhérence, intérieur, limite, etc. sont les mêmes pour toutes les distances d_p, $1 \leq p \leq \infty$, qui proviennent des normes $\| \ \|_p$, $1 \leq p \leq \infty$ (en effet pour toutes les normes, car on verra que deux normes quelconques sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes, Théorème 2.2.14).

1.10 Suites d'applications

Soient (X,d) et (Y,δ) deux espaces métriques.

Définition 1.10.1. *Une* **suite d'applications** *est une application $f : \mathbb{N} \times X \to Y$. On note $f_n := f(n,\cdot) : X \to Y$ une application de la suite et avec $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite.*

Définition 1.10.2. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications, $f_n : X \to Y$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $f : X \to Y$ une application.*

On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement** *vers f sur X, lorsque*

$$\forall x \in X,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 = n_0(x,\varepsilon) \in \mathbb{N}, \quad t.q. \quad \forall n \geq n_0,\ \delta(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément** *vers f sur X, lorsque*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \quad t.q. \quad \forall x \in X,\ \forall n \geq n_0,\ \delta(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Une autre façon de formuler la convergence uniforme est la suivante :

Proposition 1.10.3. *La suite (f_n) converge uniformément vers f sur X si et seulement si*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in X} \delta(f_n(x), f(x)) = 0.$$

Proposition 1.10.4. *Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur X, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur X.*

Théorème 1.10.5 (Limite uniforme d'applications continues)**.** *Une limite uniforme d'applications continues est continue.*

Autrement dit, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications continues, $f_n : X \to Y$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, qui converge uniformément vers une application $f : X \to Y$ sur X, alors f est également continue sur X.

Preuve. Fixons $x_0 \in X$ et $\varepsilon > 0$. Comme la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, il existe $n_1 \geq 0$ tel que, pour tout $n \geq n_1$,

$$\forall x \in X,\ \delta(f_n(x), f(x)) \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

De plus, la fonction f_{n_1} étant continue en x_0, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in B_d(x_0, \eta),\ \delta(f_{n_1}(x), f_{n_1}(x)) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in B_d(x_0, \eta)$, on a

$$\delta(f(x), f(x_0)) \leq \delta(f(x), f_{n_1}(x)) + \delta(f_{n_1}(x), f_{n_1}(x_0)) + \delta(f_{n_1}(x_0), f(x_0)) \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon,$$

ce qui montre f continue en x_0 pour tout $x_0 \in X$. □

Remarque 1.10.6. *Ce n'est en général pas vrai avec la convergence simple ! Par exemple, dans les fonctions de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, la suite de fonction (f_n) donnée par $f_n(x) = x^n$ pour x dans $[0, 1]$ converge simplement vers la fonction qui vaut 1 en 1 et 0 ailleurs.*

2 Topologies

2.1 Définition et généralités

On revient dans ce chapitre sur la notion de *partie ouverte*. On peut remarquer que, si on voit la notion de partie ouverte comme une abstraction de la notion de boule ouverte, où on oublie l'aspect métrique, on peut parler de partie fermée, adhérence, intérieur, frontière, convergence, continuité, densité et de beaucoup d'autres notions introduites dans des espaces métriques sans utiliser la distance. Ces définitions font en effet sens dans des espaces très généraux, pas forcement métriques, s'ils sont munis d'une *topologie*, c'est-à-dire d'un ensemble d'ouverts.

Soit X un ensemble non vide et $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X.

Définition 2.1.1. *On dit que $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$ est une* **topologie** *sur X si les trois axiomes suivants sont satisfaits :*

i) $\emptyset \in \mathcal{O}$ et $X \in \mathcal{O}$;

ii) Une union infinie d'éléments de $\mathcal{O}$ est un élément de $\mathcal{O}$,

iii) Une intersection finie d'éléments de $\mathcal{O}$ est un élément de $\mathcal{O}$.

On appelle **parties ouvertes** *les elements de $\mathcal{O}$ et $(X, \mathcal{O})$ un* **espace topologique***.*

Autrement dit, $\mathcal{O}$ doit être stable par une union quelconque et par intersection finie.

Exemple 2.1.2. Soit X un ensemble non vide.
On remarque toute de suite que si (X, d) est un espace métrique, $\mathcal{O}_d := \{\text{parties ouvertes de } (X, d)\}$, est une topologie pour X!
La **topologie discrète** donnée par $\mathcal{O} = \{\mathcal{P}(X)\}$ est la topologie sur X définie par la distance discrète, voir Exemple 1.1.5. Dans cette topologie toute partie est ouverte (et donc fermée)!
La **topologie grossière** donnée par $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$ ne provient pas d'une métrique ! Dans cette topologie, $\emptyset$ et X sont les seules parties ouvertes (et donc les seules fermées)!

Définition 2.1.3. *On dit que l'espace topologique $(X, \mathcal{O})$ est* **métrisable** *s'il existe une distance sur X ayant $\mathcal{O}$ comme ensemble des parties ouvertes.*

Les parties ouvertes nous permettent de définir la plupart des notions que l'on a vu dans le chapitre sur les espaces métriques. Il s'agit de notions pour lesquelles il n'est pas nécessaire d'utiliser la notion de distance !

Soit E une partie de X et $x_0 \in X$. À l'aide d'une topologie $\mathcal{O}$ sur X on peut donc (ré)introduire les notions suivantes.

Définition 2.1.4. *Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique.*

i) On dit que $V \subseteq X$ est un **voisinage de** *$x_0 \in X$, si $\exists O \in \mathcal{O}$ t.q. $x_0 \in O \subseteq V$.*

ii) Un point $x_0 \in X$ est un **point intérieur** *à E s'il existe un voisinage de x_0 contenu dans E.*

iii) Un point $x_0 \in X$ est un **point adhérent** *à E si tout voisinage de x_0 a intersection non vide avec E.*

iv) E est une **partie fermée** *si E^c est une partie ouverte.*

v) On appelle **intérieur** *de E l'ensemble $\mathring{E}$ de tous les points intérieurs à E.*

vi) On appelle **adhérence** *de E l'ensemble $\overline{E}$ de tous les points adhérents à E.*

vii) On appelle **frontière** *de E l'ensemble $\partial E := \overline{E} \setminus \mathring{E}$.*

vii) Soient $E \subseteq V \subseteq X$ deux parties de X on dit que E est **dense dans** *V lorsque $\overline{E} = V$.*

viii) E est **d'intérieur vide** *lorsque $\mathring{E} = \emptyset$.*

Prenez le temps de comparer les définitions ci-dessus avec celles données dans le chapitre précédent !

Remarque 2.1.5. Bien évidemment la définition d'ensemble fermé que l'on vient de donner est équivalente à celle donnée dans la Définition 1.5.1-*ii*). Même chose pour la définition de l'intérieur de E et celle donnée dans la Définition 1.6.1 et pour la définition de l'adhérence de E et la Définition 1.6.4. En effet, elles n'utilisent que les notions de parties fermées et ouvertes.

Les notions de boule, partie bornée et diamètre sont forcement liées à la notion de distance.

On revient maintenant aux suites. La notion de suite bornée est forcement liée à la notion de distance, mais on peut quand même parler de convergence en utilisant les voisinages.

Définition 2.1.6. *Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans X* **converge vers** *$y \in X$ si pour tout voisinage V de y, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, t.q. $\forall n \geq n_0, x_n \in V$.*

Remarque 2.1.7. Attention ! La limite n'est pas forcément unique dans un espace qui est juste topologique ! (En effet, la propriété de Hausdorff, Proposition 1.3.5, qui garantit l'unicité de la limite et qui est valide dans les espaces métriques, n'est pas forcément vraie dans un espace topologique ! Un espace topologique dans lequel la propriété de Hausdorff n'est pas valable ne peut pas être métrisable.)

Soit $(X, \mathcal{O})$ avec la topologie grossière $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$, toute suite converge vers tout élément de X, la limite n'est pas unique ! En effet, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X, pour tout $y \in X$ le seule voisinage de y est X même (les ouverts sont $\{\emptyset, X\}$) et toute la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est contenue dans X! La topologie grossière n'est pas métrisable !

Définition 2.1.8. *Un espace topologique $(X, \mathcal{O})$ dans lequel la propriété de Hausdorff est valable, i.e.*

$$\forall x_1 \neq x_2, \exists U, V \in \mathcal{O} \text{ t.q. } x_1 \in U, x_2 \in V \text{ et } U \cap V = \emptyset,$$

est dit **séparé** *ou* **de Hausdorff**.

Remarque 2.1.9. Toute topologie provenant d'une distance est séparée ! On dira par abus de langage qu'un espace métrique est séparé.

Un espace topologique X avec la topologie grossière $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$, n'est pas séparé s'il contient au moins deux point. En effet, le seul ouvert qui contient un point de X est X lui-même. Donc si X contient deux points, ces deux points ne peuvent pas être dans deux ouverts différents.

ATTENTION : un espace topologique séparé n'est pas forcement métrisable.

Proposition 2.1.10. *Dans un espace topologique séparé $(X, \mathcal{O})$, la limite d'une suite est unique.*

Preuve. Suivre la preuve du Théorème 1.8.7. □

Proposition 2.1.11. *Dans un espace topologique séparé $(X, \mathcal{O})$ tout ensemble fini est fermé.*

Preuve. Il suffit de montrer que $\{x\}$ est fermé (car un ensemble fini est une union finie de singletons), où $x \in X$. Si $X = \{x\}$, alors $\{x\}$ est ouvert et fermé (car X l'est !). On suppose donc que X a plus d'un point. Soit $y \in \{x\}^c$. Alors on peut choisir un ouvert $V_y \subseteq X$, qui contient y mais pas x car X séparé. Il s'ensuit que $\{x\}^c = \bigcup_{y\in\{x\}^c} V_y$, qui est alors réunion de ouverts, donc ouvert. □

Remarque 2.1.12. ATTENTION : un singleton n'est pas fermé en géneral dans un espace qui est seulement topologique.

Soit $(X, \mathcal{O})$ avec la topologie grossière $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$, si X contient au moins deux éléments, aucun singleton $\{x\}$ n'est fermé ! En effet, les seuls fermés de $(X, \mathcal{O})$ sont $\emptyset$ et X.

Proposition 2.1.13. *Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique. Si une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $E \subseteq X$ converge vers $y \in X$ alors $y \in \overline{E}$.*

Preuve. Suivre la preuve du Théorème 1.8.10-i) implication $\Leftarrow$. □

Remarque 2.1.14. Cependant, l'implication opposée n'est pas forcément vraie. En effet, on ne peut pas caractériser l'adhérence par les suites lorsqu'il y a trop de voisinages.

(Pour aller un peu plus loin dans la compréhension : Si $y \in \overline{E}$ et y admet une « base dénombrable » de voisinages alors il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E qui converge vers y.)

Définition 2.1.15. *Soient $(X, \mathcal{O})$ et $(Y, \mathcal{O}')$ deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application. On dit que $y \in Y$ est la* **limite** *de f en x_0 si pour tout voisinage V de y, $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x_0. L'application f est* **continue** *en $x_0 \in X$ si $f(x_0)$ est la limite de f en x_0. f est* **continue sur** *$E \subseteq X$ si elle est continue en tout point x de E.*

Remarque 2.1.16. Les propositions 1.9.10, 1.9.4 et le Corollaire 1.9.12 restent vrais dans un espace topologique. Cependant, on ne peut pas caractériser la continuité par les suites lorsqu'il y a trop de voisinages. En effet, seulement l'implication $i) \Rightarrow ii)$ du Théorème 1.9.3 est vraie dans un espace topologique quelconque. (Pour aller un peu plus loin dans la compréhension : On a $ii) \Rightarrow i)$ si x_0 admet une « base dénombrable » de voisinages.)

La continuité uniforme et la notion d'application lipschitzienne n'ont pas de sens en général dans un espace topologique.

Définition 2.1.17. *Soient $(X, \mathcal{O})$ et $(Y, \mathcal{O}')$ deux espaces topologiques, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications, $f_n : X \to Y$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $f : X \to Y$ une application.*

On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement** *vers f sur X, lorsque pour tout $x \in X$ la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.*

La convergence uniforme n'a pas de sens en général dans un espace topologique.

2.2 Comparaison des topologies, distances, normes

Un ensemble X peut être muni de plusieurs topologies. On se propose ici de les comparer.

Définition 2.2.1. *Soient $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ deux topologies sur X. On dit que $\mathcal{O}$ est* **plus fine** *que $\mathcal{O}'$ si toute partie ouverte de $\mathcal{O}'$ est une partie ouverte pour $\mathcal{O}$, i.e. $\mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}$.*

Si la réciproque est aussi vraie, on dit que les topologies $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ sont **équivalentes***.*

Remarque 2.2.2. La topologie $\mathcal{O}$ est plus fine que $\mathcal{O}'$ si et seulement si l'identité de X est une application continue de $(X, \mathcal{O})$ dans $(X, \mathcal{O}')$.

Si $\mathcal{O}$ est plus fine que $\mathcal{O}'$ alors elle contient tous les parties ouvertes de $\mathcal{O}'$ plus éventuellement des autres parties ouvertes.

Toute topologie sur X est moins fine que la topologie discrète (où toutes les parties sont ouvertes) et plus fine que la topologie grossière (où les seules parties ouvertes sont $\emptyset$ et X).

Proposition 2.2.3. *Soient $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ deux topologies sur X. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

i) Les topologies $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ sont équivalentes.

ii) Les topologies $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ définissent les mêmes parties fermées.

iii) Pour tout espace topologique $(Y, \mathcal{V})$, les fonctions continues de $(X, \mathcal{O})$ dans $(Y, \mathcal{V})$ et de $(X, \mathcal{O}')$ dans $(Y, \mathcal{V})$ sont les mêmes.

iv) Pour tout espace topologique $(Y, \mathcal{V})$, les fonctions continues de $(Y, \mathcal{V})$ dans $(X, \mathcal{O})$ et de $(Y, \mathcal{V})$ dans $(X, \mathcal{O}')$ sont les mêmes.

v) L'application identité $i : (X, \mathcal{O}) \to (X, \mathcal{O}')$ est un homéomorphisme.

On a aussi le résultat suivant :

Proposition 2.2.4. *Soient $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ deux topologies sur X. Si les topologies $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ sont équivalentes alors les espaces $(X, \mathcal{O})$ et $(X, \mathcal{O}')$ ont les mêmes suites convergentes.*

Remarque 2.2.5. *L'implication opposée n'est pas vraie en général. (Elle est vraie quand les deux espaces topologiques admettent l'implication ii) $\Rightarrow$ i) du Théorème 1.9.3, voir Remarque 2.1.16. Voir aussi la Proposition 2.2.10).*

Bien évidemment, on peut aussi comparer les topologies provenant de deux distances sur X.

Définition 2.2.6. *Deux distances d et d_* sur X sont* **topologiquement équivalentes** *si les topologies $\mathcal{O}_d$ et $\mathcal{O}_{d_*}$ sont équivalentes.*

Remarque 2.2.7. Si deux distances d et d_* sur X sont équivalentes dans le sens de la Définition 1.1.6, elles sont aussi topologiquement équivalentes. (L'implication suit de l'Exemple 1.9.25 et de la Proposition 2.2.3) Cependant le contraire n'est pas vrai en général.

En effet, la Proposition qui suit est fausse en général pour des distances qui sont seulement topologiquement équivalentes.

Proposition 2.2.8. *Si deux distances d, d_* sur X sont équivalentes, alors elles ont les mêmes parties bornées et donc les mêmes suites bornées.*

Preuve. Le résultat suit facilement de la Définition 1.1.6 de distances équivalentes. □

Exemple 2.2.9. Soit $X = \mathbb{R}$, on considère la distance usuelle $d(x, y) = |x - y|$ et la distance $d_*(x, y) = \min\{1, |x - y|\}$. Ces deux distances sont topologiquement équivalentes mais pas équivalentes. En effet l'identité $i : (X, d) \to (X, d_*)$ est un homéomorphisme.

Soit $x_0 \in X$, pour tout $\varepsilon > 0$ $\exists \eta, 0 < \eta < \min\{1, \varepsilon\}$, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x - x_0| < \eta$ on a $d_*(x, x_0) = \min\{1, |x - x_0|\} \leq \min\{1, \eta\} = \eta < \varepsilon$. i est continue en x_0.

Soit $x_0 \in X$, pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists \eta, 0 < \eta < \min\{1, \varepsilon\}$, tel que pour pour tout $x \in \mathbb{R}$, $d_*(x, x_0) < \eta$, on a $\min\{1, |x - x_0|\} < \eta < \min\{1, \varepsilon\}$, donc forcement $\min\{1, |x - x_0|\} = |x - x_0|$ et $|x - x_0| < \eta < \min\{1, \varepsilon\} < \varepsilon$ (car $\min\{1, |x - x_0|\} = 1$ implique $1 < \eta < \min\{1, \varepsilon\}$, impossible). i^{-1} est continue en x_0.

D'autre part, l'ensemble $E = [0, +\infty[$ n'est pas borné pour d mais il est borné pour d_*. En effet $\text{diam}_d E = +\infty$ et $\text{diam}_{d_*} E = 1$!!

Proposition 2.2.10. *Deux distances d, d_* sur X sont topologiquement équivalentes, si et seulement si les espaces (X, d) et (X, d_*) ont les mêmes suites convergentes.*

On se propose maintenant de comparer les topologies dans un espace vectoriel X muni de deux normes différentes $\| \ \|$ et $\| \ \|_*$. On considère, pour tout $x, y \in X$, $d(x, y) := \|x - y\|$ et $d_*(x, y) := \|x - y\|_*$ les deux distances associées.

Définition 2.2.11. *Deux normes $\| \ \|$ et $\| \ \|_*$ sur un espace vectoriel X sont* **topologiquement équivalentes** *si les topologies $\mathcal{O}_d$ et $\mathcal{O}_{d_*}$ sont équivalentes.*

Remarque 2.2.12. On a déjà remarqué que $\| \ \|$ et $\| \ \|_*$ sont deux normes équivalentes dans le sens de la Définition 1.2.3 si et seulement si d et d_* sont deux distances équivalentes (Remarque 1.2.9). Donc deux normes équivalentes sont aussi topologiquement équivalentes. Grace à l'homogénéité et à l'invariance par translation de la norme, le contraire est aussi vrai dans un espace vectoriel normé !

Théorème 2.2.13. *Deux normes $\| \ \|$ et $\| \ \|_*$ sur un espace vectoriel X sont équivalentes si et seulement si elles sont topologiquement équivalentes.*

Preuve. L'implication $\Rightarrow$ est évidente (voir Remarque 2.2.12).

$\Leftarrow$ On suppose donc que les topologies $\mathcal{O}_d$ et $\mathcal{O}_{d_*}$ soient équivalentes. Étant un homéomorphisme, l'identité de $(X, \| \ \|)$ dans $(X, \| \ \|_*)$ est continue sur X, donc en particulier en 0. Il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in X$, $\|x\| < \eta$ alors $\|x\|_* < 1$. Soit alors $x \in X \setminus \{0\}$. Clairement $\left\| \frac{\eta}{2} \frac{x}{\|x\|} \right\| = \frac{\eta}{2} < \eta$, donc $\left\| \frac{\eta}{2} \frac{x}{\|x\|} \right\|_* < 1$. On en déduit que pour tout $x \in X$

$$\|x\|_* \leq \frac{2}{\eta} \|x\|.$$

L'autre inégalité s'obtient de la même façon en prenant l'identité de $(X, \| \ \|_*)$ dans $(X, \| \ \|)$. $\square$

Si l'espace vectoriel est de dimension finie on peut en dire plus !

Théorème 2.2.14. *Soit X un espace vectoriel de dimension finie. Alors les normes sur X sont toutes équivalentes.*

Preuve. Considérons d'abord le cas des espaces vectoriels réels. On se donne une norme de référence $\| \ \|_\infty$ sur X en choisissant une base $(e_1, \dots, e_n)$ de X (possible car X a dimension finie n) et en posant pour $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$

$$\|x\|_\infty := \max\{|\lambda_i| \mid i = 1, \dots, n\}.$$

Alors l'application

$$\phi : (X, \| \ \|_\infty) \to (\mathbb{R}^n, \| \ \|_\infty)$$

définie par $\phi(x) = \phi(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est une isométrie linéaire, voir Définition 1.9.21, et on a $\|\phi(x)\|_\infty = \|x\|_\infty$. On en déduit que $(X, \| \ \|_\infty)$ satisfait la conclusion du Théorème 1.8.16 de Bolzano-Weierstrass. (Si $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée de $(X, \| \ \|_\infty)$, $(\phi(x_k))_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée de $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_\infty)$ et par Bolzano-Weierstrass admet une sous-suite convergente $(\phi(x_{k_j}))_{k_j \in \mathbb{N}}$. Alors $(x_{k_j})_{k_j \in \mathbb{N}}$ est une sous-suite convergente de $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$.)

On considère alors une norme quelconque $\| \ \|$ sur X. On a pour tout $x \in X$

$$\|x\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\| \leq \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \, \|e_k\| \leq \sum_{k=1}^{n} \|x\|_\infty \, \|e_k\| \leq C_1 \|x\|_\infty,$$

où $C_1 = n \max_{1 \leq k \leq n} \|e_k\|$. Ça implique, en particulier, qu'une suite convergente pour la norme $\| \ \|_\infty$, converge aussi pour la norme $\| \ \|$ vers la même limite.

Montrons ensuite que $\exists C_2 > 0$ tel que pour tout $x \in X$, $\|x\|_\infty \leq C_2 \|x\|$. Par contradiction, supposons que

$$\forall m > 0, \ \exists x_m \text{ tel que } \ \frac{\|x_m\|_\infty}{m} > \|x_m\| \geq 0.$$

On trouve donc une suite $y_m := \frac{x_m}{\|x_m\|_\infty}$, telle que $\|y_m\|_\infty = 1$ et $\|y_m\| \to 0$ pour $m \to +\infty$ (en effet $\|y_m\| = \frac{\|x_m\|}{\|x_m\|_\infty} < \frac{1}{m}$). D'un part $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 dans $(X, \| \ \|)$. D'autre part, comme $\|y_m\|_\infty = 1$, par Bolzano-Weierstrass (que on vient de prouver sur $(X, \| \ \|_\infty)$) on peut extraire une sous-suite $(y_{m_j})_{m_j \in \mathbb{N}}$ convergente vers $y \in X$ pour la norme $\| \ \|_\infty$, i.e. $\|y_{m_j} - y\|_\infty \to 0$ pour $j \to +\infty$, et grâce à l'étape précédente (une suite convergente pour la norme $\| \ \|_\infty$, converge aussi pour la norme $\| \ \|$ vers la même limite) $\|y_{m_j} - y\| \to 0$ pour $j \to +\infty$. Or, étant $(y_{m_j})_{m_j \in \mathbb{N}}$ une sous-suite de $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$, on a que $\|y_{m_j}\| \to 0$ et par unicité de la limite $y = 0$. Cependant

$$|\|y\|_\infty - 1| = |\|y\|_\infty - \|y_{m_j}\|_\infty| \leq \|y - y_{m_j}\|_\infty \to 0.$$

Donc $\|y\|_\infty = 1$ alors que $y = 0$, absurde !

Dans le cas d'un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, on se donne une isométrie vers $(\mathbb{C}^n, \| \|_\infty)$. Comme $(\mathbb{C}, | |)$ satisfait aussi le Théorème 1.8.16 de Bolzano-Weierstrass (étant isométrique à $(\mathbb{R}^2, \| \|_\infty)$), $(\mathbb{C}^n, \| \|_\infty)$. □

Remarque 2.2.15. L'hypothèse de **dimension finie** est nécessaire ! **Contre-exemple** : Les normes $\| \|_1$ et $\| \|_\infty$ sur $C([0,1], \mathbb{R})$ (voir Exemple 1.2.11 pour la définition de ces normes) ne sont pas équivalentes. En effet, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions $C([0,1], \mathbb{R})$ où f_n est définie pour $n \geq 1$

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ -nx + 1 & x \in]0, \frac{1}{n}] \\ 0 & x \in]\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

converge pour $\| \|_1$, mais pas pour $\| \|_\infty$. Ces deux normes ne sont même pas topologiquement équivalentes !

Dans la preuve précédente, on a montré aussi que, si X est un espace vectoriel de dimension finie, alors $(X, \| \|_\infty)$ satisfait le Théorème de Bolzano-Weierstrass. Comme les normes sont toutes équivalentes sur X, on a obtienu la propriété suivante.

Corollaire 2.2.16 (Théorème de Bolzano-Weierstrass)**.** *Soit $(X, \| \|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. Toute suite bornée de $(X, \| \|)$ admet (au moins) une valeur d'adhérence.*

Remarque 2.2.17. Grâce à ces résultats, nous pouvons à présent utiliser, dans les espaces normés à dimension finie, la norme plus utile dans chaque situation. Par exemple, en utilisant la norme $\| \|_\infty$, on pourra dire qu'une suite dans $\mathbb{R}^n$ converge si et seulement si la suite de chacune de ses composantes converge, et qu'une suite dans $\mathbb{R}^n$ est bornée si et seulement si la suite de chacune de ses composantes est bornée, ces affirmations restant vraies quelle que soit la norme utilisée.

2.3 Topologie induite

Définition 2.3.1. *Soit E une partie de l'espace topologique $(X, \mathcal{O})$. La famille*

$$\mathcal{O}_E = \{E \cap O \mid O \in \mathcal{O}\}$$

est une topologie pour E. (Exercice !) Ainsi $(E, \mathcal{O}_E)$ est un espace topologique. On appelle $\mathcal{O}_E$ **topologie induite** *et $(E, \mathcal{O}_E)$* **sous-espace topologique***.*

La notion de topologie induite joue un rôle important, notamment dans l'étude de la connexité; il est donc important de bien se familiariser avec elle.

Proposition 2.3.2. *i) $(X, \mathcal{O})$ séparé $\Longrightarrow$ $(E, \mathcal{O}_E)$ séparé.*

ii) Les parties fermées de $(E, \mathcal{O}_E)$ sont les intersections avec E des parties fermées de $(X, \mathcal{O})$.

iii) Les voisinages de $x \in E$ pour $\mathcal{O}_E$ sont les intersections avec E des voisinages de $(X, \mathcal{O})$.

iv) Si $F \subseteq E$, l'adhérence de F pour $\mathcal{O}_E$ est l'intersection avec E de l'adhérence de F pour $\mathcal{O}$.

v) Si $F \subseteq E$, l'intérieur de F pour $\mathcal{O}_E$ contient $E \cap \mathring{F}$, où $\mathring{F}$ est l'intérieur de F pour $\mathcal{O}$.

vi) La suite (x_n) converge dans $(E, \mathcal{O}_E)$ si et seulement si elle converge dans $(X, \mathcal{O})$ et sa limite appartient à E.

vii) Soient $(Y, \mathcal{T})$ un espace topologique et $f : X \to Y$ une application. On définit la restriction $f|_E : E \to Y$, $f|_E(x) := f(x)$ $\forall x \in E$. Alors *i) Si f est continue, alors $f|_E$ est continue.*

ii) Si f est continue en $x \in E$, $f|_E$ est continue en $x \in E$.

iii) Si E est un voisinage de x dans X et $f|_E$ est continue en $x \in E$, alors f est continue en $x \in E$.

Preuve. Exercice ! □

Proposition 2.3.3. *Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique $E \subseteq Y \subseteq X$. Alors les topologies induites sur E par $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}_Y$ sont équivalentes.*

Preuve. Exercice ! □

Proposition 2.3.4. *Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique. Soit E une partie ouverte de X alors $P \in \mathcal{O}_E \iff P \in \mathcal{O}$ et $P \subseteq E$.*

Preuve. Exercice ! □

Soit (X, d) un espace métrique et E une partie de X. Bien évidemment on peut construire la topologie induite sur E en utilisant $\mathcal{O}_d := \{\text{parties ouvertes de } (X, d)\}$ et la Définition 2.3.1. Mais on peut aussi induire la topologie sur E de la métrique induite d_E définie dans l'Exemple 1.1.10. Ces deux façons de procéder sont équivalentes.

Proposition 2.3.5. *Une partie $A \subseteq E$ est ouverte dans (E, d_E), i.e. $A \in \mathcal{O}_{d_E}$, si et seulement si il existe une partie ouverte O de (X, d), i.e. $O \in \mathcal{O}_d$, tel que $A = O \cap E$, c'est-à-dire que $\mathcal{O}_{d_E}$ et $(\mathcal{O}_d)_E$ sont équivalentes.*

Preuve. Remarquer que pour tout $x_0 \in E$, $r > 0$, on a $B_{d_E}(x_0, r) = B_d(x_0, r) \cap E$ et montrer que un ouvert de $\mathcal{O}_{d_E}$ est aussi ouvert de $(\mathcal{O}_d)_E$ et vice versa. □

Bien évidemment, si la topologie provient d'une distance on pourra aussi caractériser les boules, les parties bornées et les suites bornées dans E à l'aide de la distance induite d_E. (Exemple: (x_n) suite de points de E est bornée dans (X, d) si et seulement si elle est bornée dans (E, d_E))

Corollaire 2.3.6. *Soit $(X, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé de dimension quelconque et $Y \subset X$ un sous-espace vectoriel de dimension finie. Alors,*

i) Toute norme $\| \ \|_*$ sur Y est équivalente à la norme induite $\| \ \|_Y$ (voir Définition 1.2.12).

ii) Toute suite bornée de Y admet une valeur d'adhérence dans Y.

iii) Y est fermé dans $(X, \| \ \|)$.

Preuve. *i)* Y étant un espace vectoriel de dimension finie, satisfait le Théorème 2.2.14. Toute norme est donc équivalente sur Y et, en particulier, toute norme est équivalente à la norme induite $\| \ \|_Y$.

ii) De plus, Y étant un espace vectoriel de dimension finie, satisfait aussi le Corollaire 2.2.16. Donc toute suite bornée pour n'importe quelle norme $\| \ \|_*$ sur Y admet (au moins) une valeur d'adhérence dans Y.

iii) On déduit du point précédent que, en particulier, toute suite bornée pour la norme induite $\| \ \|_Y$ admet (au moins) une valeur d'adhérence dans Y. D'autre part, toute suite convergente de $(X, \| \ \|)$ est bornée par le Théorème 1.8.8. Donc, toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de Y convergente, admet une seule valeur d'adhérence (sa limite x) et elle est bornée dans $(X, \| \ \|)$. Étant bornée pour la norme $\| \ \|$, elle et bornée pour la norme $\| \ \|_Y$ (qui est juste la restriction de $\| \ \|$ à Y), donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence $y \in Y$, dans $(Y, \| \ \|_Y)$. Il s'ensuit que $x = y$ appartient à Y et Y est fermé (Théorème 1.8.10-*ii*)).

□

2.4 Topologie produit

Définition 2.4.1. *Soient* $(X_1, \mathcal{O}_1), (X_2, \mathcal{O}_2), \ldots, (X_n, \mathcal{O}_n)$, *n espaces topologiques. Notons* $X := X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$. *Soit* $\mathcal{O}$ *la topologie donnée par les réunions de produits d'ouverts de* $\mathcal{O}_i$, *i.e.*

$$\mathcal{O} := \{\cup_{\alpha \in A} U_\alpha \mid U_\alpha = O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n \text{ où } O_i \in \mathcal{O}_i\}.$$

$\mathcal{O}$ *est bien une topologie dite* **topologie produit** *sur* X *et* $(X, \mathcal{O})$ *un espace topologique (Exercice !) dit* **espace produit** *des espaces topologiques* $(X_1, \mathcal{O}_1), (X_2, \mathcal{O}_2), \ldots, (X_n, \mathcal{O}_n)$.

On aura donc les propriétés suivantes.

Proposition 2.4.2. *i)* $(X_i, \mathcal{O}_i)$ *séparé,* $\forall i = 1, \ldots, n \Longrightarrow (X, \mathcal{O})$ *séparé.*

ii) Les produits $F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_n$ *des parties fermés* F_i *de* $(X_i, \mathcal{O}_i)$, $\forall i = 1, \ldots, n$, *sont des parties fermées de* $(X, \mathcal{O})$.

iii) La partie $V \subseteq X$ *est un voisinages de* $x \in X$ *pour* $\mathcal{O}$ *si et seulement si* $\forall i = 1, \ldots, n$ *il existe* V_i *voisinage de* x_i *dans* $(X_i, \mathcal{O}_i)$ *tels que* $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \subseteq V$.

iv) L'adhérence de $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ *dans* $(X, \mathcal{O})$ *est* $\overline{E_1} \times \overline{E_2} \times \cdots \times \overline{E_n}$ *où* $\overline{E_i}$ *est l'adhérence de* E_i *dans* $(X_i, \mathcal{O}_i)$, $\forall i = 1, \ldots, n$.

v) L'intérieur de $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ *dans* $(X, \mathcal{O})$ *est* $\mathring{E}_1 \times \mathring{E}_2 \times \cdots \times \mathring{E}_n$ *où* $\mathring{E}_i$ *est l'intérieur de* E_i *dans* $(X_i, \mathcal{O}_i)$, $\forall i = 1, \ldots, n$.

vi) La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge dans* $(X, \mathcal{O})$ *si et seulement si ses composantes convergent.*

vii) Soit $(Y, \mathcal{T})$ *un espace topologique.*

a) Si $f : X \to Y$ *est continue de* $(X, \mathcal{O})$ *dans* $(Y, \mathcal{T})$ *alors pour tout* $i = 1, \ldots, n$, *pour tout* $\bar{x}_j \in X_j$, $j \neq i$, *fixés,* $f_i : X_i \to Y$

$$x \mapsto f_i(x) := f(\bar{x}_1 \times \cdots \times \bar{x}_{i-1} \times x \times \bar{x}_{i+1} \times \cdots \times \bar{x}_n),$$

est continue de $(X_i, \mathcal{O}_i)$ *dans* $(Y, \mathcal{T})$.

b) $g : Y \to X$, $g = (g_1, \ldots, g_n)$, g *continue de* $(Y, \mathcal{T})$ *dans* $(X, \mathcal{O})$ *si et seulement si chaque projection* $g_i : Y \to X_i$ *est continue de* $(Y, \mathcal{T})$ *dans* $(X_i, \mathcal{O}_i)$, *pour tout* $i = 1, \ldots, n$.

Preuve. Exercice ! □

Remarque 2.4.3. ATTENTION : dans $(X, \mathcal{O})$ on peut avoir des ouverts qui ne sont pas produits d'ouverts de $(X_i, \mathcal{O}_i)$ et des fermés qui ne sont pas produits de fermés de $(X_i, \mathcal{O}_i)$. En effet regardons le cas de $\mathbb{R}^2$ avec la topologie produit.

L'ensemble $O := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (en effet $\forall (x_1, x_2) \in O$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que $U_{(x_1,x_2)} :=]x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon[\times]x_2 - \varepsilon, x_2 + \varepsilon[\subset O$, or $U_{(x_1,x_2)}$ est ouvert, produit de deux ouverts de $\mathbb{R}$, et $O = \bigcup_{(x_1,x_2) \in O} U_{(x_1,x_2)}$).

On considère l'ouvert $]0, 1[\times]0, 1[$, donc $(]0, 1[\times]0, 1[)^c$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$ pour la topologie produit et qui n'est pas un produit de fermés. En effet $(]0, 1[\times]0, 1[)^c \neq (]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[) \times (]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[)$. (Dessiner les deux ensembles pour se convaincre !)

Remarque 2.4.4. ATTENTION : La réciproque de la Proposition 2.4.2-*vii*)-*a*) est fausse en général.

Contre-exemple: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x_1, x_2) = \frac{2x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}$ si $(x_1, x_2) \neq 0$ et $f(0, 0) = 0$. La fonction $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_1(x_1) = \frac{2x_1 \bar{x}_2}{x_1^2 + \bar{x}_2^2}$ est continue pour tout $\bar{x}_2 \in \mathbb{R}$ et, de même, la fonction $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_2(x_2) = \frac{2\bar{x}_1 x_2}{\bar{x}_1^2 + x_2^2}$ est continue pour tout $\bar{x}_1 \in \mathbb{R}$. Cependant, f est continue en tout point autre que $(0,0)$. En effet si f était continue en $(0,0)$, l'application $x \mapsto f(x,x)$ (composition de f avec la fonction continue $x \mapsto (x,x)$) serait continue en $(0,0)$ mais $f(x,x) = 1$ pour tout $x \neq 0$ et $f(0,0) = 0$. Absurde !

Bien évidemment, si $(X_1, d_1), (X_2, d_2), \dots, (X_n, d_n)$ sont n espaces métriques on peut aussi considérer sur X la topologie $\mathcal{O}_d$ provenant de la distance produit d définie dans l'Exemple 1.1.11. On a alors

Proposition 2.4.5. *La topologie $\mathcal{O}_d$ associée à la distance produit sur X est équivalente à la topologie produit $\mathcal{O}$ définie à partir de $(X_1, \mathcal{O}_{d_1}), (X_2, \mathcal{O}_{d_2}), \dots, (X_n, \mathcal{O}_{d_n})$.*

Preuve. Remarquer que pour tout $x \in X$, $r > 0$ on a $B_d(x_0, r) = B_{d_1}(x_1, r) \times \cdots \times B_{d_n}(x_n, r)$ et montrer que un ouvert de $\mathcal{O}$ est aussi ouvert de $\mathcal{O}_d$ et réciproquement. □

Bien évidemment si la topologie provient d'une distance, on pourra aussi caractériser les boules, les parties bornées et les suites bornées dans X comme produit de boules, de parties bornées et de suites bornées dans (X_i, d_i), $\forall i = 1, \dots, n$.

2.5 Connexité

Définition 2.5.1. *Un espace topologique $(X, \mathcal{O})$ est* **connexe** *si on ne peut pas l'écrire comme $X = O_1 \cup O_2$ où $O_1, O_2 \subseteq X$ sont deux parties non vides, disjointes et ouvertes.*

Un partie E de $(X, \mathcal{O})$ est **connexe** *si $(E, \mathcal{O}_E)$ est un espace topologique connexe pour la topologie induite $\mathcal{O}_E$.*

Remarque 2.5.2. La connexité d'une partie E est une propriété intrinsèque. i.e. elle ne depend que de l'espace topologique $(E, \mathcal{O}_E)$ et non de l'espace topologique ambient $(X, \mathcal{O})$.

De manière naturelle, on dit que un espace métrique (X, d) est connexe si $(X, \mathcal{O}_d)$ est connexe. Idem pour un espace vectoriel normé.

Exemple 2.5.3.

- L'ensemble vide $\emptyset$ est connexe.
- Dans un espace topologique $(X, \mathcal{O})$, tout singleton est connexe. En effet, les seuls ouverts de $(\{x\}, \mathcal{O}_{\{x\}})$ sont $\{\{x\}, \emptyset\}$.
- Dans un espace métrique (X, d), si $x \neq y \in X$ alors $\{x\} \cup \{y\}$ n'est pas connexe. (En effet, c'est vrai aussi dans un espace topologique séparé, mais pas en général dans un espace topologique quelconque, voir le dernier point ci-dessous)
- Dans $(\mathbb{R}, |\ |)$ l'ensemble $E = [0,1] \cup [2,3]$ n'est pas connexe alors que $]0,1]$ est connexe.
- $(\mathbb{Q}, |\ |)$ n'est pas connexe. En effet $\mathbb{Q} = (\,]-\infty, \sqrt{2}[\, \cap \mathbb{Q}) \cup (\,]\sqrt{2}, +\infty[\, \cap \mathbb{Q})$.
- Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique avec la topologie discrète. X est connexe si et seulement si $X = \{x\}$. En effet, dans $(X, \mathcal{O})$, toute partie est ouverte et si X contient plus que un point $x \in X$, on peut écrire $X = \{x\} \cup \{x\}^c$ (union de deux ouverts disjoints non vides !)
- Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique avec la topologie grossière. X est toujours connexe. En effet, les seuls ouverts sont $\{X, \emptyset\}$. Ici, si $x \neq y \in X$ alors $\{x\} \cup \{y\}$ est connexe. En effet, les seuls ouverts de $(\{x\} \cup \{y\}, \mathcal{O}_{\{x\} \cup \{y\}})$ sont $\{\{x\} \cup \{y\}, \emptyset\}$.

On donne maintenant des définitions équivalentes de la connexité.

Théorème 2.5.4. *Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

i) X *est connexe.*

ii) *On ne peut pas écrire* X *comme* $X = O_1 \cup O_2$ *où* $O_1, O_2 \subseteq X$ *sont deux parties non vides, disjointes et fermées.*

iii) *Les seules parties à la fois ouvertes et fermées dans* X *sont* $\emptyset$ *et* X*.*

iv) *Toute application* $f : X \to \{0,1\}$ *de* $(X, \mathcal{O})$ *dans* $(\{0,1\}, \mathcal{O}_{|\ |})$ *continue est constante.*

Preuve. *non ii)* $\Rightarrow$ *non i)* soit $X = O_1 \cup O_2$ où $O_1, O_2 \subseteq X$ sont non vides, disjointes et fermées. Alors $O_1^c = O_2$ et $O_2^c = O_1$ sont deux parties non vides, disjointes et ouvertes telles que $X = O_1^c \cup O_2^c$, mais alors X n'est pas connexe.

non iii) $\Rightarrow$ *non ii)* Si $E \subset X$ est une partie ouverte et fermée telle que $E \neq \emptyset$ et $E \neq X$ alors $X = E \cup E^c$, où E et E^c sont deux parties non vides, disjointes et fermées.

iii) $\Rightarrow$ *iv)* On remarque tout de suite que dans $(\{0,1\}, \mathcal{O}_{|\ |})$, $\{0\}$ et $\{1\}$ sont ouverts et fermés. Soit $f : X \to \{0,1\}$ continue. Alors $f^{-1}(\{0\})$ est ouvert et fermé dans $(X, \mathcal{O})$, donc soit $f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$ soit $f^{-1}(\{0\}) = X$. Idem pour $f^{-1}(\{1\})$.

non i) $\Rightarrow$ *non iv)* Soient O_1 et O_2 deux ouverts de E disjoints et non vides tels que $X = O_1 \cup O_2$. On définit $f : X \to \{0,1\}$ en posant $f(O_1) = 0$ et $f(O_2) = 1$. f est continue (vérifier que l'image réciproque $f^{-1}(F)$ de toute partie fermée $F \subseteq \{0,1\}$ pour la topologie $(\{0,1\}, \mathcal{O}_{|\ |})$, i.e. $\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}$, est une partie fermée de $(X, \mathcal{O})$) mais pas constante).

□

Proposition 2.5.5. *Dans* $(\mathbb{R}, |\ |)$*,* E *est une partie connexe non vide si et seulement si* E *est un intervalle.*

(Attention : un singleton $\{x\} = [x, x]$ est un intervalle, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ est aussi un intervalle, voir Exemple 1.5.6).

Preuve. $\Rightarrow$ Montrons que si E est un connexe non vide alors E est un intervalle. En effet, si E est un connexe non vide et $E = \{x\}$, alors E est un intervalle. Soient $x < y \in E$ et supposons par contradiction qu'il existe $x < z < y, z \notin E$. Alors $O_1 :=]-\infty, z[\cap E$ et $O_2 :=]z, +\infty[\cap E$ sont deux ouverts, non vides et disjoints tels que $E = O_1 \cup O_2$. Absurde. Donc

$$]\inf\{x \in E\}, \sup\{x \in E\}[\subseteq E \subseteq [\inf\{x \in E\}, \sup\{x \in E\}],$$

i.e. E est un intervalle (par abus de notation $[-\infty, +\infty] =]-\infty, +\infty[$, $]x, x[= \emptyset$, $[x, x] = \{x\}$).

$\Leftarrow$ Réciproquement, soit E un intervalle non vide, O_1 et O_2 fermés (dans $(E, |\ |)$), non vides tels que $E = O_1 \cup O_2$. On doit montrer que $O_1 \cap O_2$ n'est pas vide, pour avoir que E est connexe. Comme O_1 et O_2 ne sont pas vides, soient $x \in O_1$ et $y \in O_2$. Si $x = y$ alors $x \in O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$ et on a fini. Soit alors $x \neq y$. Supposons sans perte de généralité que $x < y$. Puisque E est un intervalle, on a $[x, y] \subseteq E$. Soit

$$z = \sup\{O_1 \cap [x, y]\}.$$

On va montrer que $z \in O_1 \cap O_2$. Or $O_1 \cap [x, y]$ est non vide (car $x \in O_1 \cap [x, y]$) et majorée (car $z \leq y$). Donc $z \in \overline{O_1 \cap [x, y]}$ (voir Proposition 1.6.13) et vu que $O_1 \cap [x, y]$ est fermé dans $\mathbb{R}$, on a $z \in \overline{O_1 \cap [x, y]} = O_1 \cap [x, y]$. Donc $z \in O_1$. Montrons que $z \in O_2$. Si $z = y$ alors $z \in O_2$ et on a fini. Si $z \neq y$, comme z est la borne supérieure de $O_1 \cap [x, y]$, on a $]z, y] \cap O_1 = \emptyset$. Or, $]z, y] \subset E = O_1 \cup O_2$, donc $]z, y] \subseteq O_2$. Or $z \in \overline{]z, y]} = [z, y] \subseteq \overline{O_2} = O_2$, donc $z \in O_2$. □

Proposition 2.5.6. *Soient* $(X, \mathcal{O}_X)$ *et* $(Y, \mathcal{O}_Y)$ *deux espaces topologiques et* $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ *une application continue. Si* $(X, \mathcal{O}_X)$ *est connexe alors* $f(X)$ *est connexe pour la topologie induite de* $\mathcal{O}_Y$*.*

Preuve. Si $f(X)$ n'est pas connexe alors il existe une application continue non constante $g : f(X) \to \{0,1\}$. Alors, l'application composée $g \circ f : X \to \{0,1\}$ est continue et non constante ($f(X)$ n'est pas connexe donc $f(X) \neq \{y\}$, car tout singleton est connexe, et f n'est pas constante). Donc X n'est pas connexe. $\square$

Corollaire 2.5.7. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue. Alors l'image d'un intervalle par f est un intervalle.*

Preuve. C'est une conséquence des propositions 2.5.6 et 2.5.5. $\square$

Corollaire 2.5.8. *Soient $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ deux topologies équivalentes sur X. Alors X est connexe pour $\mathcal{O}$ si et seulement si X est connexe pour $\mathcal{O}'$.*

Proposition 2.5.9. *Soient $(X_1, \mathcal{O}_1), (X_2, \mathcal{O}_2), \ldots, (X_n, \mathcal{O}_n)$, n espaces topologiques et $(X, \mathcal{O})$ l'espace topologique produit introduit dans la Définition 2.4.1. $(X, \mathcal{O})$ est connexe si et seulement si $(X_i, \mathcal{O}_i)$ est connexe pour tout $i = 1, \ldots, n$.*

Preuve. Exercice ! $\square$

Proposition 2.5.10. *Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique et $(E_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de parties connexes d'intersection non vide. Alors $\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha$ est connexe.*

Preuve. Une application continue $f : \bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha \to \{0,1\}$ est constante sur chacun des E_α donc sur $\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha$, car $\bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha \neq \emptyset$. $\square$

Remarque 2.5.11. Une intersection de parties connexes n'est pas connexe en général. Même une intersection décroissante de connexes n'est pas connexe en général. Donner des exemples !

Lemme 2.5.12. *Soit E une partie connexe de $(X, \mathcal{O})$ espace topologique et $E \subseteq B \subseteq \overline{E}$. Alors B est une partie connexe. En particulier, $\overline{E}$ est une partie connexe.*

Preuve. Soit $f : B \to \{0,1\}$ continue donc $f|_E : E \to \{0,1\}$ est continue et, comme E connexe, elle est constante. E étant dense dans B, on a f constante aussi sur B. $\square$

On considère maintenant la connexité dans un espace vectoriel normé.

Définition 2.5.13. *Soit $(X, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ et E un partie de X. E est dite* **convexe** *si i.e. $\forall x, y \in E$ et $\forall t \in [0,1]$ on a $(1-t)x + ty \in E$.*

Proposition 2.5.14. *Toute partie convexe d'un espace vectoriel normé est connexe. En particulier, un espace vectoriel normé est connexe.*

Preuve. Soit $(X, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ et E une partie de X convexe. Soit $f : E \to \{0,1\}$ une fonction continue quelconque. Pour tout $x, y \in E$, la courbe $\gamma : [0,1] \to E$ définie par $\gamma(t) := (1-t)x + ty$ est continue. Donc, $f \circ \gamma : [0,1] \to \{0,1\}$ est continue et comme $[0,1]$ est connexe elle est forcement constante. Mais alors $f(x) = f(\gamma(0)) = f(\gamma(1)) = f(y)$, donc f est aussi constante. $\square$

Remarque 2.5.15. Soit $(X, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$, la boule unité est convexe, donc connexe par la proposition précédente. En effet, pour tout $x, y \in B(0,1)$ et $\forall t \in [0,1]$, on a $\|(1-t)x + ty\| \leq (1-t)\|x\| + t\|y\| < 1 - t + t = 1$. Donc $(1-t)x + ty \in B(0,1)$.

ATTENTION : Dans un espace métrique on peut avoir des boules qui ne sont pas connexes. Exemple : soit $([0,2] \cup [3,4], d)$ avec d la distance discrète. Pour tout $x \in [0,2] \cup [3,4]$ et $r > 1$, la boule ouverte $B_d(x,r) = [0,2] \cup [3,4]$ n'est pas connexe. Voir Exemple 1.3.3.

2.5.1 Connexité par arcs

Pour terminer ces considérations sur la connexité, on introduit une propriété plus restrictive que la connexité.

Définition 2.5.16. *Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique, $x, y \in X$. On appelle* **arc** *ou* **chemin** *une application continue $\gamma : ([0,1], |\ |) \to (X, \mathcal{O})$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.*

Remarque 2.5.17. Pour $x, y \in X$ la relation « $x\mathcal{R}y$ » si et seulement si il existe un arc de x à y" est une relation d'équivalence.

Définition 2.5.18. *Un espace topologique $(X, \mathcal{O})$ est* **connexe par arcs** *si, pour tout $x, y \in X$, il existe un arc de x à y.*

Exemple 2.5.19. Dans $(\mathbb{R}, |\ |)$, soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Alors

$$\mathrm{graph}(f) := \{(x, f(x)) |\ x \in \mathbb{R}\}$$

est connexe par arcs. En effet pour tout $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$ dans graph(f) $\gamma : [0,1] \to \mathrm{graph}(f)$ définie par $\gamma(t) = ((1-t)x + ty, f((1-t)x + ty)$ est un arc de x à y.

Théorème 2.5.20. *Si $(X, \mathcal{O})$ est un espace topologique connexe par arcs, alors il est connexe.*

Preuve. Vu que X est connexe par arcs, pour tout $x, y \in X$ il existe $\gamma : [0,1] \to X$ continue telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Or, pour tout $y \in X$, $E_y = \gamma([0,1]) \subseteq X$ est un famille de parties connexes avec intersection non vide car $x \in E_y$. Comme $X = \bigcup_{y \in X} E_y$, on a X connexe par la Proposition 2.5.10. □

Proposition 2.5.21. *Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ et $(Y, \mathcal{O}_Y)$ deux espaces topologiques et $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ une application continue. Si $(X, \mathcal{O}_X)$ est connexe par arcs, alors $(f(X), \mathcal{O}_{f(X)})$ est connexe par arcs.*

Proposition 2.5.22. *Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique et $(E_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de parties connexes par arcs d'intersection non vide. Alors, $\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha$ est connexe par arcs.*

Remarque 2.5.23. Un espace topologique connexe n'est pas forcement connexe par arcs. L'adhérence du graphe de $\sin(1/x)$

$$\mathrm{graph}(\sin 1/x) := \{(x, \sin 1/x) \mid 0 < x \leq 1\}$$

est connexe (car adhérence !), mais pas connexe par arcs. Par exemple, on ne pourra jamais trouver un arc dans $\overline{\mathrm{graph}(\sin 1/x)}$ qui lie $(0,0)$ avec $(1, \sin 1)$!

On considère maintenant la connexité par arcs dans un espace vectoriel normé.

Proposition 2.5.24. *Toute partie convexe d'un espace vectoriel normé est connexe par arcs. En particulier, un espace vectoriel normé est connexe par arcs.*

Preuve. Soit $(X, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ et E un partie de X convexe. Pour tout $x, y \in E$, la courbe $\gamma : [0,1] \to E$ définie par $\gamma(t) := (1-t)x + ty$ est continue, $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$ et $\gamma([0,1]) \subset E$. □

Remarque 2.5.25. Soit $(X, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$. La boule unité est convexe, donc connexe par arcs par la proposition précédente (on a déjà vu que elle est connexe).

On peut même dire plus.

Théorème 2.5.26. *Si $(X, \|\ \|)$ est un espace vectoriel normé, $E \subseteq X$ une partie ouverte connexe de X, alors elle est connexe par arcs.*

Preuve. Si $E = \emptyset$, on n'a rien à prouver. Soit donc $x \in E$ et posons $A := \{y \in E \mid y\mathcal{R}x\}$ (voir Remarque 2.5.17). A n'est pas vide car $x \in A$. On montre que A est ouvert et fermé dans E et comme E connexe ça implique $A = E$.

On note d la distance définie par la norme $d(x, y) = \|x - y\|$, pour tout $x, y \in X$.

A est ouvert : soit en effet $y \in A$ et $r > 0$ tel que $B := B_d(y, r)$ soit incluse dans E ouvert. Pour tout $z \in B$ on a $z\mathcal{R}y$ car B convexe et connexe par arcs, et $y\mathcal{R}x$. Donc $z\mathcal{R}x$ et $B \subseteq A$.

A est fermé : soit y adhérent à A pour (E, d_E) alors $y \in \overline{A} \cap E$ (voir Proposition 2.3.2-*iv*) , i.e. $\forall \varepsilon > 0$ on a $B_d(y, \varepsilon) \cap E \cap A \neq \emptyset$. De plus, E étant ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B := B_d(y, r)$ soit incluse dans E et donc pour ce même r on a $B_d(y, r) \cap B = B_d(y, r) \cap E \cap B \neq \emptyset$. Or pour tout $z \in B \cap A$ on a $z\mathcal{R}y$ car B convexe et $z\mathcal{R}x$ car $z \in A$. Donc $y\mathcal{R}x$, $y \in A$. A contient donc tout ses points d'adhérence donc est fermé.

□

Remarque 2.5.27. Dans $(\mathbb{R}^n, \| \ \|)$, une partie ouverte connexe est connexe par arcs.

2.5.2 Composantes connexes

Lemme 2.5.28. *Pour $x, y \in X$ la relation « $x\mathcal{R}y$ si et seulement s'il existe une partie E de X connexe contenant x et y » est une relation d'équivalence.*

Preuve. La réflexivité et la symétrie sont évidentes. Si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, soit A une partie connexe contenant x et y, soit B une partie connexe contenant y et z. Comme $A \cap B \neq \emptyset$, la partie $A \cup B$ est connexe donc $x\mathcal{R}z$. □

Définition 2.5.29. *Soit $x \in X$. On appelle* **composante connexe** *de X contenant x la classe d'équivalence de x pour la relation « être dans une partie connexe de X ». Autrement dit, les composantes connexes de X forment une partition de X.*

Remarque 2.5.30. On rappelle la définition suivante :

Un ensemble de parties de X est une **partition** de X si :

- aucune de ces parties n'est vide;
- leur union est égale à X;
- elles sont deux à deux disjointes.

Exemple 2.5.31. Les éléments de $\mathbb{Z}$ sont ses composantes connexes.

Proposition 2.5.32. *Pour tout $x \in X$, soit $\{C_\alpha\}_{\alpha \in A}$ la famille des parties connexes de X contenant x, i.e. telles que $x \in C_\alpha$ pour tout $\alpha \in A$. Alors la composante connexe de X contenant x est*

$$C_x = \bigcup_{\alpha \in A} C_\alpha.$$

De plus, C_x est une partie connexe et fermée et c'est la plus grande partie connexe contenant x.

Preuve. Si $y \in C_x$, alors $x\mathcal{R}y$, i.e. il existe une partie connexe C contenant x et y, d'où l'inclusion de $C_x \subseteq \cup_{\alpha \in A} C_\alpha$.

Réciproquement, si $y \in \cup_{\alpha \in A} C_\alpha$, alors il existe une partie connexe contenant x et y, d'où $x\mathcal{R}y$ et y appartient à C_x.

La partie C_x est connexe en tant qu'union de parties connexes d'intersection non vide, voir la Proposition 2.5.10. Elle est fermée car $\overline{C}_x$ est connexe, donc contenue dans C_x. □

Remarque 2.5.33. Si C_x intersecte un connexe C, alors $C \subseteq C_x$. Autrement dit, C_x avale tous les connexes qu'elle touche.

X est connexe si et seulement s'il n'a qu'une composante connexe.

Lemme 2.5.34. *Soit $E \subseteq X$ une partie non vide, ouverte, fermée et connexe. Alors, E est une composante connexe de X.*

Preuve. Soit $x \in E$. Alors $E \subseteq C_x$, car E est connexe et C_x est la plus grande partie connexe contenant x.

Réciproquement, $C_x \cap E$ est non vide, ouvert et fermé dans C_x connexe : il est donc égal à C_x, voir Théorème 2.5.4. On a donc $C_x = C_x \cap E \subseteq E$. □

Remarque 2.5.35. La réciproque de ce lemme est fausse : en général une composante connexe n'est pas ouverte. Par exemple les composantes connexes de $\mathbb{Q}$ sont des singletons, qui ne sont pas ouverts dans $\mathbb{Q}$.

Exemple 2.5.36. Les composantes connexes de $[0,1] \cup [2,3]$ sont $[0,1]$ et $[2,3]$.

On considère maintenant les composantes connexes dans un espace vectoriel normé.

Proposition 2.5.37. *Si E est une partie ouverte d'un espace vectoriel normé $(X, \| \ \|)$, les composantes connexes de E sont ouvertes et fermées dans E.*

Preuve. On note d la distance définie par la norme $d(x,y) = \|x-y\|$, pour tout $x, y \in X$.

Soit $x \in E$ et C_x sa composante connexe dans E. Il suffit de montrer qu'elle est ouverte (car on sait déjà qu'elle est fermée dans E par la Proposition 2.5.32). Soit $y \in C_x$ et soit $\varepsilon > 0$ tel que $B_d(y, \varepsilon) \subset E$. La boule $B_d(y, \varepsilon)$ est connexe dans E, car convexe dans un espace vectoriel normé, et intersécte C_x, donc $B_d(y, \varepsilon) \subset C_x$. □

Proposition 2.5.38. *Si E est une partie ouverte d'un espace vectoriel normé $(X, \| \ \|)$, E est réunion disjointe de parties connexes et ouvertes de X.*

Preuve. Les composantes connexes de X conviennent. □

Proposition 2.5.39. *Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ et $(Y, \mathcal{O}_Y)$ deux espaces topologiques et $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ une application continue. Alors pour tout $x \in X$, $f(C_x) \subseteq C_{f(x)}$, ou $C_{f(x)}$ est la composante connexe de $f(x)$ dans $f(X)$.*

Preuve. Exercice ! □

3 Compacité

Dans ce chapitre on introduit la notion de compacité.

3.1 Compacité au sens de Bolzano-Weierstrass

On se place ici dans un espace métrique.

Définition 3.1.1. *(Compacité au sens de Bolzano-Weierstrass) Un espace métrique* (X, d) *est* **compact** *si toute suite de* X *admet (au moins) une valeur d'adhérence.*

Une partie E *de* X *est* **compacte** *si* (E, d_E) *est compact pour la métrique induite* d_E.

Remarque 3.1.2. La compacité d'une partie E est une propriété intrinsèque. i.e. elle ne depend que de l'espace métrique (E, d_E) et non de l'espace métrique ambient (X, d).

Exemple 3.1.3.

- Dans un espace métrique (X, d), l'ensemble vide $\emptyset$ est toujours compact. Tout singleton est compact. Si $x \neq y \in X$ alors $\{x\} \cup \{y\}$ est compact.
- $(\mathbb{R}, |\ |)$ n'est pas compact (prendre $x_n = n$). Toute intervalle $[a, b]$ de $(\mathbb{R}, |\ |)$ est compact (en effet $[a, b]$ est borné donc, par le théorème de Bolzano-Weierstrass, toute suite de $[a, b]$ admet au moins une valeur d'adhérence dans $\mathbb{R}$. Vu que $[a, b]$ est fermé cette valeur est dans $[a, b]$!).

Proposition 3.1.4. *Soit* (X, d) *un espace métrique et* E *une partie non vide de* X *munie de la distance induite* d_E.

i) Si E *est compacte alors* E *est fermée et bornée dans* (X, d).

ii) Si X *est compact et* E *est fermée dans* (X, d)*, alors* E *est compacte.*

Preuve. *i)* Soit E une partie compacte. On prend une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de E convergeant vers $x \in X$. Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une seule valeur d'adhérence (sa limite x) dans (X, d) et par compacité $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence aussi dans (E, d_E). Donc x appartient à E et E est fermée. Supposons par contradicition E ne soit pas bornée. Soit $x_0 \in E$. On peut construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E telle que $d(x_0, x_n) \geq n$, $\forall n \geq 0$. Aucune sous-suites de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut être convergente car elles sont non bornées, mais E compacte, absurde. Donc E est bornée.

ii) Si X est compact et E est fermée dans X, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de $E \subseteq X$. Comme X compact, elle possède une sous-suite convergente dans X, mais comme E est fermée la limite de cette suite extraite doit être dans E.

□

Remarque 3.1.5. Un espace métrique compact (X, d) est borné.

On peut donc caractériser les compactes de $\mathbb{R}$.

Corollaire 3.1.6. *Une partie* E *de* $(\mathbb{R}, |\ |)$ *est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.*

Preuve. $\Rightarrow$ est une consequence de la Proposition 3.1.4.

$\Leftarrow$ Soit $E \subseteq \mathbb{R}$ une partie fermée et bornée. Elle est donc inclue dans un intervalle $[-r, r]$, $r > 0$, qui est compact. Puisque E est un partie fermée de $\mathbb{R}$, elle est a fortiori fermée dans $([-r, r], |\ |)$. La Proposition 3.1.4-*ii*) assure donc que E est compacte. □

La proposition suivante est parfois bien utile pour montrer qu'une suite est convergente.

Proposition 3.1.7. *Soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite à valeurs dans un espace métrique compact* (X, d). *Alors cette suite est convergente si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.*

Preuve. $\Rightarrow$ Toute suite convergente dans un espace métrique quelconque a une unique valeur d'adhérence.

$\Leftarrow$ Supposons maintenant que (X,d) est compact, et que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une unique valeur d'adhérence $x_0 \in X$. Procédons par l'absurde et supposons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers x_0. Il existe alors une boule $B_d(x_0,\varepsilon)$ de rayon $\varepsilon > 0$ telle que $F := X \setminus B_d(x_0,\varepsilon)$ contienne une infinité de termes de la suite. Cette partie F est fermée dans X, donc compacte. On obtient donc une seconde valeur d'adhérence $x_1 \in F$ (et donc $x_1 \neq x_0$) pour $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. $\square$

Proposition 3.1.8. *Soient $(X_1,d_1),(X_2,d_2),\ldots,(X_n,d_n)$, n espaces métriques et (X,d) l'espace métrique produit introduit dans la Définition 1.1.11. (X,d) est compact si et seulement si (X_i,d_i) est compact pour tout $i=1,\ldots,n$.*

Preuve. Exercice ! $\square$

Proposition 3.1.9. *Soient (X,d) un espace métrique et $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante (pour l'inclusion) de parties compactes, non vides de X. Alors $K := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ est compacte et non vide. Si de plus $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont aussi connexes alors K est connexe.*

3.2 Compacité et continuité.

Proposition 3.2.1. *Soient (X,d) et (Y,δ) deux espaces métriques et $f : X \to Y$ une application continue. Si X est compact alors $f(X)$ est compact.*

Preuve. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $f(X)$. Alors pour tout $n \geq 0$, il existe $x_n \in X$ tel que $f(x_n) = y_n$. Comme X est compact, il existe une suite extraite $(x_{n_k})_{n_k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une limite $x_0 \in X$. Comme f est continue, la suite $y_{n_k} := f(x_{n_k})$ converge vers $f(x_0) \in f(X)$. $\square$

Corollaire 3.2.2. *Soient (X,d) et (X,δ) deux espaces métriques topologiquement équivalents. Alors (X,d) est compact si et seulement si (X,δ) est compact.*

Une autre application fondamentale concerne les extrema des fonctions à valeurs réelles.

Corollaire 3.2.3. *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une application continue à valeurs réelles, définie sur un espace métrique compact non vide (X,d). Alors f est bornée et atteint ses bornes.*

Preuve. L'image $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$. Elle est donc bornée et admet ainsi une borne inférieure et une borne supérieure. On a $\sup\{f(x) \mid x \in X\} \in \overline{f(X)}$ (voir Proposition 1.6.13) et puisque $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ est fermée, $\sup\{f(x) \mid x \in X\} \in \overline{f(X)} = f(X)$. De même pour l'inf. $\square$

La compacité assure l'uniforme continuité d'une application.

Théorème 3.2.4 (Théorème de Heine)**.** *Soient (X,d) et (Y,δ) deux espaces métriques. Si (X,d) est compact et $f : (X,d) \to (Y,\delta)$ est continue, alors f est uniformément continue.*

Preuve. On rappelle que f est uniformément continue si

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\eta > 0 \text{ t.q. } \forall x_0, x \in X\ d(x,x_0) < \eta \Rightarrow \delta(f(x),f(x_0)) < \varepsilon.$$

On donne un démonstration par contradiction. On admet donc qu'il existe $\varepsilon > 0$, deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X telles que $d(x_n,y_n) < \frac{1}{n}$ mais $\delta(f(x_n),f(y_n)) > \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La compacité de X permet de faire converger une sous-suite $(x_{n_k})_{n_k\in\mathbb{N}}$ vers $x \in X$. Alors $(y_{n_k})_{n_k\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers x (car $d(y_{n_k},x) \leq d(y_{n_k},x_{n_k}) + d(x_{n_k},x) \to_{k\to+\infty} 0$). Par continuité de f en x on a $f(x_{n_k}) \to f(x)$ et $f(y_{n_k}) \to f(x)$ et par continuité de la distance δ on a $\delta(f(x_{n_k}),f(y_{n_k})) \to 0$ alors que $\delta(f(x_n),f(y_n)) > \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, absurde. $\square$

Théorème 3.2.5. *Soient* (X, d) *et* (Y, δ) *deux espaces métriques. Si* (X, d) *est compact et* $f : (X, d) \to (Y, \delta)$ *est bijective et continue, alors* f *est un homéomorphisme.*

Preuve. f étant bijective est inversible et $f(X) = Y$. Il suffit donc de montrer que l'application réciproque $f^{-1} : (Y, \delta) \to (X, d)$ est continue, i.e. que pour toute partie fermée $E \subseteq X$ on a $(f^{-1})^{-1}(E)$ fermée dans Y. Or si $E \subseteq X$ est une partie fermée de X, alors E est compacte car X est compact (Proposition 3.1.4-*ii*)). Or $(f^{-1})^{-1}(E) = f(E)$ (car f bijective) est compacte car f continue (Proposition 4.1.4) et par conséquent fermée (Proposition 3.1.4-*i*)). $\square$

3.3 Compacité au sens de Borel-Lebesgue

Définition 3.3.1. *Un* **recouvrement ouvert** *d'un espace métrique* (X, d) *est une collection* $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in A}$ *d'ouverts* U_α *de* X *tels que* $X = \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$.

Définition 3.3.2. *Un espace métrique a la propriété de* **Borel-Lebesgue** *si de tout recouvrement ouvert* $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in A}$ *on peut extraire un recouvrement fini, i.e. il existe* $I \subset A$ *fini tel que* $X = \cup_{i \in I} U_i$.

Cette définition resterait valable dans le cadre plus général d'un espace topologique **séparé**. Dans un espace métrique, la propriété de Borel-Lebesgue est équivalente à la compacité !

Théorème 3.3.3. *Soit* (X, d) *un espace métrique. Alors les conditions suivantes sont équivalentes.*

- *L'espace* (X, d) *satisfait la propriété de Borel-Lebesgue.*
- *L'espace* (X, d) *est compact.*

La remarque suivante sera bien utile dans la pratique, lorsqu'il s'agira de montrer qu'une partie E d'un espace métrique (X, d) est compacte.

Remarque 3.3.4. Soient (X, d) un espace métrique, et $E \subseteq X$ une partie de X. Alors l'espace métrique (E, d_E) est compact si et seulement si, de tout recouvrement de E par des ouverts de X, on peut extraire un sous-recouvrement fini.

3.4 Compacité dans un espace normé

On se met dans cette section dans un espace vectoriel normé $(X, \| \ \|)$ et on note d la distance définie par la norme $d(x, y) = \|x - y\|$, pour tout $x, y \in X$.

Théorème 3.4.1. *Dans un espace vectoriel normé* $(X, \| \ \|)$, *les conditions suivantes sont équivalentes.*

i) La sphère unité $S(0, 1)$ *est compacte.*

ii) La boule unité $\overline{B}(0, 1)$ *fermée est compacte.*

iii) Toute boule fermée est compacte.

iv) Les fermés bornés sont compacts.

Preuve. Le fait que *i*) $\Rightarrow$ *ii*) est le seul point délicat (faire les autres points par Exercice !). Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\overline{B}(0, 1)$. S'il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{n_k \in \mathbb{N}}$ identiquement nulle c'est gagné. Sinon, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \neq 0$ pour tout $n \geq n_0$. On considère alors pour $n \geq n_0$, $y_n := \frac{x_n}{\|x_n\|}$. (y_n) appartient à la sphère unité pour tout $n \geq n_0$. Par compacité de la sphère unité, il existe une sous-suite $(y_{n_k})_{n_k \in \mathbb{N}}$ convergeant vers y dans la sphère unité et, par compacité de $[0, 1]$, il existe une sous-sous-suites $\|x_{n_{k_j}}\|$ convergeant vers $\lambda \in [0, 1]$. Alors $x_{n_{k_j}} = \|x_{n_{k_j}}\| y_{n_{k_j}}$ converge vers λy. $\square$

Dans un espace vectoriel normé de dimension finie on peut même dir plus.

Théorème 3.4.2. *Soit $(X, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et $E \subseteq X$ une partie de X. Alors E est compacte si et seulement si elle est une partie bornée et fermée.*

Preuve. $\Rightarrow$ On a vu dans la Proposition 3.1.4-*i*) qu'une partie compacte est aussi fermée et bornée (dans n'importe quel espace métrique).

$\Leftarrow$ Réciproquement, on utilise le fait que X est un espace vectoriel normé de dimension finie, et donc satisfait Bolzano-Weierstrass par le Corollaire 2.2.16. Soit donc E une partie fermée et bornée de X. Une suite de E admet une valeur d'adhérence x_0 dans X par le Corollaire 2.2.16. Mais comme E est fermée, la limite est dans E. $\square$

Remarque 3.4.3. On en déduit que dans un espace vectoriel normé de dimension finie la sphère unité est compacte et toute boule fermée est compacte.

On cherche maintenant à montrer que un espace vectoriel normé où les fermés et bornés sont compacts est nécessairement à dimension finie. Le Théorème suivant caractérise les espaces vectoriels à dimension finie. Il est donc très important.

Théorème 3.4.4 (Théorème de compacité de Riesz)**.** *Un espace vectoriel normé $(X, \| \ \|)$ est de dimension finie si et seulement si la boule unité fermée est compacte.*

Preuve. $\Rightarrow$ C'est une consequence du Théorème 3.4.2 et du Théorème 3.4.1.

$\Leftarrow$ On admet que la boule unité fermée est compacte et on montre que X est de dimension finie. On note d la distance définie par la norme $d(x, y) = \|x - y\|$, pour tout $x, y \in X$.

Étape 1. Montrons que si $\overline{B}(0, 1)$ est compacte, on peut la recouvrir par un nombre fini de boules ouvertes de rayon $1/2$. C'est-à-dire il existe $x_1, \dots, x_k$ dans $\overline{B}(0, 1)$ tel que

$$\overline{B}(0, 1) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B_d(x_i, 1/2).$$

(On peut obtenir ça directement en utilisant le Théorème 3.3.3!)

En effet, on prend x_1 dans $\overline{B}(0, 1)$. Si $B_d(x_1, 1/2)$ ne recouvre pas, on prend $x_2 \in \overline{B}(0, 1) \setminus B_d(x_1, 1/2)$. Si $B_d(x_1, 1/2) \cup B_d(x_2, 1/2)$ ne recouvre pas, on prend $x_3 \in \overline{B}(0, 1) \setminus (B_d(x_1, 1/2) \cup B_d(x_2, 1/2))$. Tant que $\cup_{i=1}^{n} B_d(x_i, 1/2)$ ne recouvre pas, on peut choisir x_{n+1} dans le complémentaire. Par construction, $d(x_i, x_j) \geq 1/2$ si $i \neq j$. Si on peut définir x_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a une suite de $\overline{B}(0, 1)$ sans sous-suite convergente (car $d(x_i, x_j) \geq 1/2$ si $i \neq j$ vérifier par Exercice !). Ceci contredit la compacité de $\overline{B}(0, 1)$, donc le procédé s'arrête avec un entier maximal $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\overline{B}(0, 1) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B_d(x_i, 1/2).$$

Étape 2. Supposons par absurde que X est de dimension infinie. Notons F le sous-espace vectoriel de X engendré par les x_i, donc F a dimension finie et $F \subset X$ mais $F \neq X$. Il existe alors $x \in X \setminus F$. On ne peut pas avoir $d(x, F) = 0$. En effet,$x \in \overline{F}$ par la Proposition 1.4.7 et $x \in \overline{F} = F$, car F sous-espace vectoriel de dimension finie est fermé (par le Corollaire 2.3.6-*iii*)). On suppose donc que $d(x, F) = r > 0$ (Noter $d(x, F) < +\infty$ par définition).

F étant fermé, il existe $y \in F$ tel que $\|x - y\| = d(x, y) = d(x, F) = r$.
En effet, soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F$ une suite minimisante pour $r = d(x, F) = \inf_{y \in F} d(x, y) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$, i.e. telle que $\lim_{n \to +\infty} \|x - y_n\| = r$, alors pour n grand $y_n \in \overline{B}_d(x, 2r) \cap F$ et $\overline{B}_d(x, 2r) \cap F$ fermé borné dans F à dimension finie, donc $\overline{B}_d(x, 2r) \cap F$ compact. Il existe donc $y \in F$ et $(y_{n_j})_{n_j \in \mathbb{N}}$ tel que $y_{n_j} \to y$ et $d(x, y) = \|x - y\| = r$, car $d(x, \cdot)$ est continue.

On note alors $x_0 := \frac{x-y}{r}$. $x_0 \in \overline{B}(0,1)$ car $\|x_0\| = \frac{\|x-y\|}{r} = 1$. Or pour tout $z \in F$ on a

$$\|x_0 - z\| = \left\| \frac{x-y}{r} - z \right\| = \frac{1}{r}\|x - y - rz\| = \frac{1}{r}\|x - (y + rz)\| \geq \frac{d(x,F)}{r} = 1$$

vu que $y + rz \in F$, car F sous-espace vectoriel.

Donc, pour tout $z \in F$, $\|x_0 - z\| \geq 1$. En particulier, $\forall i = 1, \ldots, k$ on a $\|x_0 - x_i\| \geq 1$. Alors $x_0 \notin \bigcup_{i=1}^k B_d(x_i, 1/2)$, mais $x_0 \in \overline{B}(0,1)$ et

$$\overline{B}(0,1) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B_d(x_i, 1/2).$$

Contradiction. □

Remarque 3.4.5. Voilà des **contrexemples** en dimension infinie.

- Dans $(\ell^\infty(\mathbb{R}), \| \|_\infty)$, (voir Exemple 1.2.10) la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ avec 1 en position n appartient à la boule unité fermée et n'a pas de sous-suite convergente car $d(u_n, u_m) = 1$ si $n \neq m$.

- Dans $(C([0,1], \mathbb{R}), \| \|_\infty)$, la suite de fonctions $u_n(x) = x^n$ appartient à la boule unité fermée et n'a pas de sous-suite convergente dans $(C([0,1], \mathbb{R}), \| \|_\infty)$. Sa limite simple (mais pas uniforme) est la fonction $u(x) = 0$ si $x \in [0, 1[$, $u(1) = 1$ et n'appartient pas à $C([0,1], \mathbb{R})$.

4 Complétude

Dans ce chapitre on introduit la notion de complétude. Pour ce faire, on généralisera la notion de suite de Cauchy aux espaces métriques. Contrairement à la compacité ou à la connexité, qui sont des notions topologiques, la complétude est une notion métrique, car on utilise la notion de distance pour la définir.

4.1 Définition et généralités

Soit (X, d) un espace métrique.

Définition 4.1.1. *Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de (X, d) est dite* **de Cauchy** *lorsque*

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ p \geq 0,\ d(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon.$$

On a les propriétés suivantes

Théorème 4.1.2. *i) Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy est bornée, c'est-à-dire que l'ensemble $E = \{x_n \mid n \geq 0\}$ est borné. De plus $\overline{E}$ est fermé et borné.*

ii) Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy si et seulement si $\operatorname{diam}\{x_k \mid k \geq n\}$ *tends vers 0 quand $n \to +\infty$.*

iii) Une sous-suite d'une suite de Cauchy est une suite de Cauchy.

iv) Si une sous-suite d'une suite de Cauchy converge, la suite converge. Autrement dit, une suite de Cauchy converge dès qu'elle possède au moins une valeur d'adhérence.

v) Toute suite convergente est de Cauchy.

Preuve. *i)* Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Alors

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ \forall p \geq 0,\ d(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon.$$

En particulier pour $\varepsilon = 1$

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall p \geq 0,\ d(x_{n_0+p}, x_{n_0}) < 1.$$

Soit

$$M := \max\{1, d(x_0, x_{n_0}), \dots, d(x_{n_0-1}, x_{n_0})\}.$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$d(x_n, x_{n_0}) < M + 1 =: r.$$

Donc $E := \{x_0, x_1, \dots x_n, \dots\} \subseteq B_d(x_{n_0}, r)$ est une partie bornée.

Bien évidemment $\overline{E}$ est fermée.

Or pour tout $y \in \overline{E} \setminus E$, y est d'adhérence pour $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, i.e. il existe une sous-suite $(x_{n_j})_{n_j\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{j\to+\infty} x_{n_j} = y$. Donc pour $\varepsilon = 1/2$

$$\exists j_0 \in \mathbb{N},\ \text{tel que } d(x_{n_{j_0}}, y) < \frac{1}{2}.$$

En rappelant que $E \subseteq B_d(x_{n_0}, r)$, on a

$$d(x_{n_0}, y) \leq d(x_{n_0}, x_{n_{j_0}}) + d(x_{n_{j_0}}, y) < r + \frac{1}{2} < r + 1.$$

La boule $B_d(x_{n_0}, r + 1)$ contient alors tout $\overline{E}$.

ii) $\Rightarrow$ Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ \forall p \geq 0,\ d(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon.$$

En particulier, $\forall \varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, \quad d(x_n, x_{n_0}) < \varepsilon$. Donc, pour tout $n \geq n_0$,

$$\operatorname{diam}\{x_k \mid k \geq n\} \leq \operatorname{diam}\{x_k \mid k \geq n_0\} = \sup\{d(x_k, x_m) \mid k, m \geq n_0\}$$

et

$$\sup\{d(x_k, x_m) \mid k, m \geq n_0\} \leq \sup\{d(x_k, x_{n_0}) + d(x_m, x_{n_0}) \mid k, m \geq n_0\} < 2\varepsilon.$$

C'est à dire $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0$ on a $\operatorname{diam}\{x_k \mid k \geq n\} < 2\varepsilon$, donc $\lim_{n\to+\infty} \operatorname{diam}\{x_k \mid k \geq n\} = 0$.

$\Leftarrow$ Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $\lim_{n\to+\infty} \operatorname{diam}\{x_k \mid k \geq n\} = 0$. Alors,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ \operatorname{diam}\{x_k \mid k \geq n\} = \sup\{d(x_k, x_m) \mid k, m \geq n\} < \varepsilon$$

On a donc que, pour le même $n_0, \forall n \geq n_0$,

$$\forall p \geq 0, d(x_{n+p}, x_n) < \operatorname{diam}\{x_k \mid k \geq n\} < \varepsilon.$$

iii) Évident.

iv) Soit $(x_{n_j})_{n_j\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergente et $l \in X$ sa limite. Alors $\forall \varepsilon > 0$,

$$\exists j_0 \in \mathbb{N}, \forall j \geq j_0, d(x_{n_j}, l) < \frac{\varepsilon}{2}$$

et

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0,\ \forall p \geq 0, d(x_{n+p}, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a donc que, pour tout $n \geq n_0$ et pour un $j \geq j_0$ tel que $n_j \geq n_0$,

$$d(x_n, l) \leq d(x_n, x_{n_j}) + d(x_{n_j}, l) < \varepsilon.$$

v) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente et $l \in X$ sa limite. Alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0, d(x_n, l) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a donc que, pour le même $n_0, \forall n \geq n_0$,

$$\forall p \geq 0,\ d(x_{n+p}, x_n) \leq d(x_{n+p}, l) + d(l, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\square$

Exemple 4.1.3. Exemples de suites de Cauchy non convergentes : Dans $([0,1[, |\ |)$ la suite $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ est de Cauchy mais elle n'est pas convergente car $1 \notin [0,1[$. Dans $(\mathbb{Q}, |\ |)$, n'importe quelle suite de rationnels qui converge vers un irrationnel est de Cauchy (parce que elle admet une limite finie dans $\mathbb{R}$) mais elle ne converge pas dans $\mathbb{Q}$, car la limite n'y appartient pas.

Proposition 4.1.4. *Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques et $f : X \to Y$ une application uniformément continue. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans X alors $f(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans Y.*

Preuve. f uniformément continue, donc $\forall \varepsilon > 0$

$$\exists \eta > 0, \text{ t.q. } \forall x_0 \in X, \; B_d(x_0, \eta) \subset f^{-1}(B_\delta(f(x_0), \varepsilon)),$$

i.e. $\forall x, \tilde{x} \in X$, $d(x, \tilde{x}) < \eta$ on a $\delta(f(x), f(\tilde{x})) < \varepsilon$. Or pour le même η

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \; \forall n \geq n_0, p \geq 0, \; d(x_{n+p}, x_n) < \eta, \text{i.e.}$$

donc $\delta(f(x_{n+p}), f(x_n)) < \varepsilon$.

□

Définition 4.1.5. *On dit qu'un espace métrique (X, d) est* **complet** *si toute suite de Cauchy dans X est convergente.*

Une partie E de X est **complète** *si (E, d_E) est complet pour la métrique induite d_E.*

Exemple 4.1.6. $(\mathbb{R}, |\ |)$ *est complet.* $([0, 1[, |\ |)$ *et* $(\mathbb{Q}, |\ |)$ *ne sont pas complets.*

Corollaire 4.1.7. *Un espace métrique compact est complet.*

Preuve. Dans un espace métrique (X, d) compact toute suite de X (donc même une suite de Cauchy) admet (au moins) une valeur d'adhérence, i.e. une sous-suite convergente. Par le Théorème 4.1.2, si une sous-suite d'une suite de Cauchy converge, la suite converge. □

Théorème 4.1.8. *Toute espace vectoriel normé de dimension finie est complet.*

Preuve. Toute suite de Cauchy est bornée. De plus toute espace vectoriel normé de dimension finie, satisfait Bolzano-Weierstrass par le Corollaire 2.2.16. Donc toute suite de Cauchy, étant bornée, admet une sous-suite convergente. Par le Théorème 4.1.2-*iv*) on a alors que toute suite de Cauchy converge. □

Remarque 4.1.9. L'espace $(\mathbb{R}^n, \|\ \|)$ est complet.

Remarque 4.1.10. La notion de suite de Cauchy dans un espace complet permet de montrer qu'une suite converge sans connaitre la limite à priori. C'est l'outil fondamental de beaucoup de résultats d'existence.

Proposition 4.1.11. *Soit (X, d) un espace métrique et E une partie non vide de X munie de la distance induite d_E.*

i) Si E est complet, alors E est fermée dans X.

ii) Si X est complet, E est fermée dans (X, d) alors E est complet.

Preuve. *i*) Soit E une partie complète. On prend une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de E convergeant vers $x \in X$. Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans (X, d), donc aussi dans (E, d_E), mais alors elle converge dans E complet, donc $x \in E$.

ii) Si X est complet et E est fermée dans X, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans (E, d_E), donc elle est de Cauchy aussi dans (X, d). Comme X est complet, elle possède une limite dans X, mais comme E est fermée la limite de cette suite doit être dans E.

□

Corollaire 4.1.12. *Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, les parties complètes sont les parties fermées.*

Corollaire 4.1.13. *Dans un espace vectoriel normé quelconque, tout sous-espace vectoriel de dimension finie est fermé.*

Preuve. Un sous-espace vectoriel de dimension finie est complet pour la norme induite grace au Théorème 4.1.8 et aux propriétés de la norme induite. □

Remarque 4.1.14. On vient de re-démontrer le résultat du Corollaire 2.3.6-*iii*).

Proposition 4.1.15. *Supposons que toutes parties fermées et bornées de (X, d) espace métrique soient complètes, alors X est complet.*

Preuve. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans (X, d). Posons

$$E = \{x_n \mid n \geq 0\}.$$

On a deja montré que $\overline{E}$ est une partie fermée et bornée dans le Théorème 4.1.2-*i*). Étant fermée et bornée, $\overline{E}$ est complète par hypothèse. Or $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de points de $(\overline{E}, d_{\overline{E}})$, elle converge dans $\overline{E}$ et donc dans X. □

Proposition 4.1.16. *Soient $(X_1, d_1), (X_2, d_2), \ldots, (X_n, d_n)$, n espaces métriques et (X, d) l'espace métrique produit introduit dans la Définition 1.1.11. Si (X_i, d_i) est complet pour tout $i = 1, \ldots, n$ alors (X, d) est complet.*

Preuve. Exercice ! □

4.2 Espaces de Banach.

Définition 4.2.1. *Un* **espace de Banach** *est un espace vectoriel normé complet.*

Exemple 4.2.2. Tout espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach (Théorème 4.1.8).

Corollaire 4.2.3. *Tout sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Banach est lui-même un espace de Banach pour la norme induite.*

Preuve. C'est une consequence du Théorème 4.1.11-*ii*) □

4.2.1 Séries dans les Banach

Définition 4.2.4. *Une* **série** *d'un espace vectoriel X est une suite de couples $(x_n, S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$. On appelle x_n le* **terme général** *de la série et S_n la* **somme partielle de rang** *n. La série $(x_n, S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sera dénotée par $\sum x_n$.*

Définition 4.2.5. *On dit qu'une série $\sum x_n$ d'un espace vectoriel normé $(X, \| \ \|)$* **converge** *vers $x \in X$ si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x dans $(X, \| \ \|)$. On note $x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ la limite de la série. On dit que $\sum x_n$ satisfait* **la condition de Cauchy** *lorsque $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.*

Remarque 4.2.6. Si $(X, \| \ \|)$ est un espace de Banach alors la condition de Cauchy est équivalente à la convergence de la série.

Définition 4.2.7. *On dit qu'une série $\sum x_n$ d'un espace vectoriel normé $(X, \| \ \|)$* **converge normalement** *vers $x \in X$ si la série $\sum \|x_n\|$ converge dans $\mathbb{R}$. Cela revient à dire que $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$.*

Dans un espace de Banach une série normalement convergente est convergente !

Théorème 4.2.8. *Soit $(X, \| \ \|)$ un espace de Banach et $\sum x_n$ une série de X normalement convergente. Alors $\sum x_n$ est convergente et pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, $\sum x_{\sigma(n)}$ converge vers $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$.*

Preuve. La série $\sum \|x_n\|$ converge dans $\mathbb{R}$, donc elle satisfait la condition de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \geq 0$ tel que pour tout $n \geq n_0, p > 0$

$$\left|\sum_{k=0}^{n+p} \|x_k\| - \sum_{k=0}^{n} \|x_k\|\right| = \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\| < \varepsilon.$$

Or, on a

$$\|S_{n+p} - S_n\| = \| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_n\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\| < \varepsilon.$$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy dans X de Banach (i.e. complet), donc elle converge.

On considère la deuxième partie de l'énoncé. Soit $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une permutation. Soit $x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$. Fixons $\varepsilon > 0$ et prenons $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_1$, on a $\|x - \sum_{k=0}^{n} x_k\| < \varepsilon$. Le fait que $\sum \|x_n\|$ converge à une limite réelle $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|$, signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_2 \geq 0$ tel que pour tout $m \geq n_2$, on a

$$\sum_{k=m}^{\infty} \|x_k\| := \left|\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\| - \sum_{n=0}^{m} \|x_n\|\right| < \varepsilon.$$

On peut donc, pour tout $\varepsilon > 0$, trouver $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ tel que pour $m \geq n_0$,

$$\|x - \sum_{k=0}^{m} x_k\| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \left|\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\| - \sum_{n=0}^{m} \|x_n\|\right| < \varepsilon.$$

Or, on peut trouver $\bar{n} \in \mathbb{N}$ suffisamment grand pour que $\{\sigma(0), \sigma(1), \ldots, \sigma(\bar{n})\}$ contienne $\{0, 1, \ldots, n_0\}$ (il suffit en effet de prendre $\bar{n} = \max \sigma^{-1}\{0, 1, \ldots, n_0\}$). Alors pour $m \geq \bar{n}$,

$$\|x - \sum_{k=0}^{m} x_{\sigma(x_k)}\| \leq \|x - \sum_{k=0}^{n_0} x_k\| + \sum_{k=n_0}^{\infty} \|x_k\| < 2\varepsilon.$$

□

Le viceversa est aussi vrai.

Théorème 4.2.9. *Soit $(X, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé. Alors $(X, \|\ \|)$ est de Banach si et seulement toute série normalement convergente de X est convergente.*

Preuve. Il nous reste à montrer que si toute série normalement convergente de X est convergente alors $(X, \|\ \|)$ est de Banach.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans X. On veut montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Pour cela, il suffit de montrer qu'elle admet une valeur d'adhérence (Théorème 4.1.2-*iv*)). On veut donc construire une suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui soit convergente. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant de Cauchy, on peut construire récursivement une suite croissante d'entiers $n_1 < n_2 < \cdots < n_p < \ldots$ tels que, pour tout $p \geq 0$ et pout tout $n > n_p$, on ait

$$\|x_n - x_{n_p}\| \leq \frac{1}{2^p}.$$

En particulier, on a $\|x_{n_{p+1}} - x_{n_p}\| \leq \frac{1}{2^p}$.

Or, la série de terme général

$$y_0 := x_{n_1}, \quad y_p := x_{n_{p+1}} - x_{n_p}, \quad \forall p \geq 1$$

est normalement convergente (car $\sum_{p=1}^{\infty} \|x_{n_{p+1}} - x_{n_p}\| \leq \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2^p}$), donc convergente. Puisque les sommes partielles de la série $\sum y_k$ vérifient

$$\sum_{k=0}^{p} y_k = x_{n_{p+1}},$$

la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet pour valeur d'adhérence la limite $\sum y_k$. Étant $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy et vu qu'elle admet une valeur d'adhérence, elle est convergente.

□

5 Applications linéaires continues

Soient $(X, \| \|_X)$ et $(Y, \| \|_Y)$ deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Définition 5.0.1. *Une application $f : X \to Y$ est dite* **linéaire** *si elle vérifie les propriétés suivantes :*

- $\forall x_1, x_2 \in X,\ f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$;
- $\forall x \in X,\ \lambda \in \mathbb{K},\ f(\lambda x) = \lambda f(x)$ *(homogénéité).*

Proposition 5.0.2 (Caractérisation fondamentale)**.** *Soit $f : X \to Y$ une application linéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

i) L'application f est continue.

ii) L'application f est continue en $0 \in X$.

iii) L'application f est bornée sur la boule unité de X.

iv) L'application f est bornée sur les parties bornée de X.

v) Il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $x \in X$

$$\|f(x)\|_Y \leq M\|x\|_X.$$

vi) L'application f est Lipschitzienne, c'est-à-dire il existe $M \geq 0$ tel que, pour tout $x_1, x_2 \in X$

$$\|f(x_1) - f(x_2)\|_Y \leq M\|x_1 - x_2\|_X.$$

vii) L'application f est uniformément continue sur X.

Preuve. Le fait que $i) \Rightarrow ii)$ est immédiat.

$ii) \Rightarrow iii)$ On remarque toute de suite que si f est linéaire $f(0) = 0$. On suppose f continue en $0 \in X$, donc pour $\varepsilon = 1$, il existe $\eta > 0$ tel que $f(B_X(0, \eta)) \subseteq B_Y(0, 1)$. Or on a

$$\frac{1}{\eta} f(B_X(0, \eta)) \subseteq \frac{1}{\eta} B_Y(0, 1),$$

et donc

$$f(B_X(0, 1)) \subseteq B_Y(0, \frac{1}{\eta}).$$

C'est-à-dire f est bornée sur la boule unité de X.

$iii) \Rightarrow iv)$ Si f est bornée sur la boule unité de X, l'homogénéité de f assure alors que l'image par f de toute partie bornée de X est bornée dans Y.

$iv) \Rightarrow v)$ Si f est bornée sur les parties bornée de X, en particulier $f(S_X(0, 1))$ est bornée. Alors il existe $M \geq 0$ tel que $\|f(S_X(0, 1))\|_Y \leq M$, i.e. pour tout $x \in X, x \neq 0$, on a

$$\left\| f\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right) \right\|_Y \leq M,$$

et par linéarité, pour tout $x \in X, x \neq 0$,

$$\|f(x)\|_Y \leq M\|x\|_X.$$

$v) \Rightarrow vi)$ Il suffit d'appliquer $v)$ à $x_1 - x_2$.

$vi) \Rightarrow vii)$ Les applications Lipschitziennes sont uniformément continues.

$vi) \Rightarrow i)$ Les applications uniformément continues sont continues

□

Théorème 5.0.3. *Si $(X, \| \ \|_X)$ est un espace vectoriel normé de dimension finie alors toute application linéaire $f : X \to Y$ est continue.*

Preuve. D'après la Proposition 5.0.2, il suffit de démontrer que f est bornée sur la boule unité.

Comme dans la preuve du Théorème 2.2.14, considérons d'abord le cas des espaces vectoriels réels. On se donne une norme de référence $\| \ \|_\infty$ sur X en choisissant une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de X (possible car X a dimension finie n) et en posant pour $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$

$$\|x\|_\infty := \max\{|\lambda_i| \mid i = 1, \ldots, n\}.$$

Alors l'application

$$\phi : (X, \| \ \|_\infty) \to (\mathbb{R}^n, \| \ \|_\infty)$$

définie par $\phi(x) = \phi(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est est une isométrie linéaire, voir Définition 1.9.21, et on a $\|\phi(x)\|_\infty = \|x\|_\infty$.

Sans perte de généralité on peut admettre que X soit muni de la norme $\| \ \|_\infty$, étant toute norme équivalente sur X (espace vectoriel de dimension finie).

Soit $x \in B_X(0, 1)$, alors $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ pour $|\lambda_i| < 1$ pour tout i. On a

$$\|f(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i)\|_Y = \| \sum_{i=1}^n \lambda_i f(e_i)\|_Y \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \|f(e_i)\|_Y < \sum_{i=1}^n \|f(e_i)\|_Y$$

On pose $M = \sum_{i=1}^n \|f(e_i)\|_Y$ et on obtient que f est bornée sur la boule unité de X.

Dans le cas d'un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, on se donne une isométrie vers $(\mathbb{C}, \| \ \|_\infty)$ qui est isométrique à $(\mathbb{R}^2, \| \ \|_\infty)$. □

Remarque 5.0.4. Une application linéaire qui est aussi continue satisfait une (et automatiquement toutes) les propriétés de la Proposition 5.0.2 ci-dessus. En particulier la fonction de $X \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{\|f(x)\|_Y}{\|x\|_X}$$

est bornée.

5.1 Espace vectoriel normé des fonctions linéaires continues

On considère ici l'espace vectoriel des fonctions linéaires continues de X dans Y, dénoté par $L_c(X, Y)$. La remarque 5.0.4 permet de formuler la définition suivante.

Définition 5.1.1. *Pour toute $f \in L_c(X, Y)$ on appelle* **norme subordonnée** *la fonction $||| \ ||| : L_c(X, Y) \to \mathbb{R}$ définie par*

$$|||f||| = \|f\|_{X,Y} = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|f(x)\|_Y}{\|x\|_X}.$$

Remarque 5.1.2. En particulier, pour tout $x \in X$

$$\|f(x)\|_Y \leq |||f||| \|x\|_X.$$

Proposition 5.1.3. *Pour tout $f \in L_c(X,Y)$ on a*

$$|||f||| = \sup_{x\in X, \|x\|_X \le 1} \|f(x)\|_Y,$$

et

$$|||f||| = \sup_{x\in X, \|x\|_X = 1} \|f(x)\|_Y,$$

Preuve. On a clairement

$$\sup_{x\in X, \|x\|_X = 1} \|f(x)\|_Y \le \sup_{x\in X, \|x\|_X \le 1} \|f(x)\|_Y \le \sup_{x\in X, x\neq 0} \frac{\|f(x)\|_Y}{\|x\|_X}.$$

D'autre part $\frac{\|f(x)\|_Y}{\|x\|_X} = \left\| f\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right)\right\|_Y$, d'où

$$\sup_{x\in X, \|x\|_X = 1} \|f(x)\|_Y = \sup_{x\in X, x\neq 0} \left\| f\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right)\right\|_Y.$$

□

Proposition 5.1.4. *La fonction $||| \ |||: L_c(X,Y) \to \mathbb{R}$ est une norme sur $L_c(X,Y)$.*

Preuve. On a bien $|||f||| \ge 0$ pour tout $f \in L_c(X,Y)$. Or $|||f||| = 0$ si et seulement si pour tout $x \in X, x \neq 0$ on a

$$\frac{\|f(x)\|_Y}{\|x\|_X} = 0,$$

donc $\|f(x)\|_Y = 0$ et, étant $\| \ \|_Y$ une norme, on a $f(x) = 0$ pour tout $x \in X, x \neq 0$ et par linéarité $f(0) = 0$, i.e. $f = 0$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ on a bien

$$|||\lambda f||| = \sup_{x\in X, \|x\|_X \le 1} \|\lambda f(x)\|_Y = \sup_{x\in X, \|x\|_X \le 1} |\lambda| \|f(x)\|_Y = |\lambda| |||f|||.$$

Si $f, g \in L_c(X,Y)$ alors

$$\begin{aligned} |||f+g||| &= \sup_{x\in X, \|x\|_X \le 1} \|f(x)+g(x)\|_Y \le \sup_{x\in X, \|x\|_X \le 1} \|f(x)\|_Y + \|g(x)\|_Y \\ &\le \sup_{x\in X, \|x\|_X \le 1} \|f(x)\|_Y + \sup_{x\in X, \|x\|_X \le 1} \|g(x)\|_Y = |||f||| + |||g|||. \end{aligned}$$

□

Remarque 5.1.5. Si X est de dimension finie, la borne supérieure

$$|||f||| = \sup_{x\in X, \|x\|_\le 1} \|f(x)\|_Y$$

est atteinte. En effet, en appliquant la caractérisation de la borne supérieure on peut définir une suite d'éléments $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X telle que $\|x_n\|_X \le 1, n \ge 0$ et $\|f(x_n)\|_Y$ tends vers $|||f|||$. Cette suite étant bornée (elle est contenue dans la boule unité fermée) et X de dimension finie, le Théorème de Bolzano-Waierstrass 2.2.16 assure que elle admet une sous-suite convergente $(x_{n_j})_{n_j\in\mathbb{N}}$ vers un élément $\bar{x} \in X$, tel que $\|\bar{x}\|_X \le 1$. Par la continuité de la norme, la continuité de f et grâce l'unicité de la limite, on a bien

$$|||f||| = \lim_{j\to+\infty} \|f(x_{n_j})\|_Y = \|f(\lim_{j\to+\infty} x_{n_j})\|_Y = \|f(\bar{x})\|_Y,$$

et la borne supérieure est donc atteinte.

Proposition 5.1.6. *Soient $(X, \| \ \|_X), (Y, \| \ \|_Y), (Z, \| \ \|_Z)$ trois espaces vectoriels normés, $f \in L_c(X,Y)$ et $g \in L_c(Y,Z)$. Alors $g \circ f \in L_c(X,Z)$ et*

$$|||g \circ f||| \leq |||g||| |||f|||.$$

Preuve. La composée de fonctions linéaires reste linéaire et la composée de fonctions continues est continue. De plus, pour tout $x \in X$ on a

$$\|g \circ f(x)\|_Z \leq |||g||| \|f(x)\|_Y \leq |||g||| |||f||| \|x\|_X.$$

□

Théorème 5.1.7. *Si $(Y, \| \ \|_Y)$ est un espace de Banach, alors $(L_c(X,Y), ||| \ |||)$ est un espace de Banach.*

Preuve. Il faut montrer que toute suite de Cauchy dans $(L_c(X,Y), ||| \ |||)$ est convergente.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(L_c(X,Y), ||| \ |||)$. Alors pour tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $(Y, \| \ \|_Y)$ car

$$\forall \varepsilon, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, p \geq 0, \ |||f_{n+p} - f_n||| < \frac{\varepsilon}{\|x\|},$$

implique que, pour le même n_0 et $\forall n \geq n_0, p \geq 0$,

$$\|f_{n+p}(x) - f_n(x)\|_Y \leq |||f_{n+p} - f_n||| \|x\|_X \leq \varepsilon.$$

Étant $(Y, \| \ \|_Y)$ complet, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $y_x \in Y$. Or, la fonction définie par $f : X \to Y$, $f(x) := y_x$ for all $x \in X$ est linéaire. En effet, pour tout $x_1, x_2 \in X$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_1) = f(x_1), \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x_2) = f(x_2), \quad \text{et} \lim_{n\to\infty} f_n(x_1 + \lambda x_2) = f(x_1 + \lambda x_2).$$

Or

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_1 + \lambda x_2) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_1) + \lambda f_n(x_2)) = f(x_1) + \lambda f(x_2),$$

et $f(x_1) + \lambda f(x_2) = f(x_1 + \lambda x_2)$ suit par unicité de la limite.

Il nous reste à montrer que f continue et que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $(L_c(X,Y), ||| \ |||)$.

On montre que la convergence de la suite d'applications $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniforme sur les parties bornées de X (voir Proposition 1.7.3 pour la caractérisation des parties bornées d'un espace vectoriel normé). En effet pour tout $M > 0$ et $\forall \varepsilon > 0$, il existe $N \geq 0$ (dépendant de ε, M), tel que pour tout $n \geq N$ et $p \geq 0$ on a $|||f_{n+p} - f_n||| < \frac{\varepsilon}{M}$. Ce qui entraine que $\|f_{n+p}(x) - f_n(x)\|_Y < \varepsilon$, pour tout $x \in X, \|x\|_X < M$. En faisant tendre $p \to +\infty$, on obtient $\|f(x) - f_n(x)\|_Y < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$, indépendamment du choix de $x \in B_X(0,M)$. On a donc,

$$\forall M > 0, \ \forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 0, \forall n \geq N, \forall x \in \overline{B}_X(0,M), \ \|f_n(x) - f(x)\|_Y < \varepsilon,$$

i.e. la convergence des $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f est uniforme sur les parties bornées de $(X, \| \ \|_X)$.

La restriction de f à chaque partie bornée de X est donc continue (voir Théorème 1.10.5) et, la continuité étant une propriéeté locale, il s'ensuit que f est continue sur X. (Pour tout $x_0 \in X$, il existe $M > 0$ tel que $x_0 \in E := \{x \in X, \|x\| < M\}$, f étant continue sur les parties bornées est continue sur E et donc en $x_0 \in E$, i.e. f est continue en chaque point de X et donc sur X)

De plus, f est bien la limite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $(L_c(X,Y), ||| \ |||)$, en effet de la convergence uniforme sur la boule unité ($M = 1$), on obtient

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 0, \forall n \geq N, \ |||f_n - f||| = \sup_{x\in\overline{B}_X(0,1)} \|f_n(x) - f(x)\|_Y = \sup_{x\in B_X(0,1)} \|f_n(x) - f(x)\|_Y < \varepsilon,$$

□

En particulier, le dual d'un espace vectoriel normé est toujours un espace de Banach.

Corollaire 5.1.8. *Soient $(X, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé et $X' = L_c(X, \mathbb{R})$ son dual, c'est-à-dire l'ensemble des application linéaires continues sur X. L'espace X', muni de la norme $||| \ |||$, est un espace de Banach.*

5.2 Application: l'exponentielle d'une matrice

Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ (une matrice à m lignes, n colonnes). Or A est une application linéaire $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. De plus, grâce au Théorème 5.0.3, étant $\mathbb{R}^n$ un espace vectoriel de dimension finie, A est toujours continue. On considère donc sur $M_{m,n}(\mathbb{R})$ la norme $\| \ \|$ définie dans la Définition 5.3.3 (toutes les normes sur $M_{m,n}(\mathbb{R})$ sont équivalentes, voir Théorème 2.2.14). Bien évidemment $(M_{m,n}(\mathbb{R}), \| \ \|)$ est un espace de Banach (Théorème 4.1.8).

On considère maintenant les matrices carrés $M_{n,n}(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$.

Théorème 5.2.1. *Pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$, la série $\sum \frac{A^m}{m!}$ converge dans $M_n(\mathbb{R})$. Ainsi on obtient l'application entre espaces vectoriels normés*

$$\exp : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$$

définie par

$$A \mapsto e^A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!}.$$

De plus l'application est une application continue entre espaces vectoriels normés et satisfait

$$\|e^A\| \leq e^{\|A\|}.$$

Preuve. On montre premièrement que l'application $\exp : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, donnée par $A \mapsto e^A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!}$, est bien définie. Pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$, on a

$$\sum_{k=0}^{m} \|\frac{A^k}{k!}\| \leq \sum_{k=0}^{m} \frac{\|A\|^k}{k!} \leq e^{\|A\|} < +\infty,$$

il s'ensuit que la série $\sum \frac{A^m}{m!}$ converge normalement et donc converge (théorème 4.2.8, $(M_n(\mathbb{R}), \| \ \|)$ est un espace de Banach !), i.e. $e^A \in M_n(\mathbb{R})$. De plus, on obtient aussi l'inégalité de l'énoncé car $\|e^A\| \leq \sum_{k=0}^{m} \|\frac{A^k}{k!}\|$.

On vérifie deuxièmement que l'application exp est continue. Or pour chaque $m \in \mathbb{N}$, on considère l'application définie par la suite des sommes partielles

$$S_m : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R}), \qquad A \mapsto \sum_{k=0}^{m} \frac{A^k}{k!}.$$

Il s'agit d'une application polynomiale en A et donc S_m est continue (voir Proposition 1.9.13). On vient de montrer que pour chaque $A \in M_n(\mathbb{R})$

$$\|S_m(A) - \exp(A)\| \to 0 \quad \text{pour } n \to +\infty,$$

car la convergence normale de la série $\sum \frac{A^m}{m!}$ implique la convergence ci-dessus. On montre que la convergence de la suite d'applications $(S_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est uniforme sur les parties bornées de $M_n(\mathbb{R})$ (voir Proposition 1.7.3 pour la caractérisation des parties bornées d'un espace vectoriel normé). En effet pour tout $M > 0$ on a

$$\sup_{A \in M_n(\mathbb{R}), \|A\| < M} \|S_m(A) - e^A\| \leq \sup_{A \in M_n(\mathbb{R}), \|A\| < M} \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{M^k}{k!}.$$

Or $\lim_{m \to +\infty} \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{M^k}{k!} = 0$, car la série numérique de terme général $\frac{M^k}{k!}$ converge vers e^M. Donc la suite d'applications $(S_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers l'application exp sur les parties bornées de $M_n(\mathbb{R})$. La restriction de l'application exponentielle à chaque partie bornée de $M_n(\mathbb{R})$ est donc continue (voir Théorème 1.10.5) et, la continuité étant une propriété locale, il s'ensuit que l'application exponentielle est continue sur $M_n(\mathbb{R})$. (Pour tout $A_0 \in M_n(\mathbb{R})$, il existe $M > 0$ tel que $A_0 \in E := \{A \in M_n(\mathbb{R}), \|A\| < M\}$, exp étant continue sur les parties bornées est continue sur E et donc en $A_0 \in E$, i.e. exp est continue en chaque point de $M_n(\mathbb{R})$ et donc sur $M_n(\mathbb{R})$) $\square$

Proposition 5.2.2. *Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$, alors $e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$.*

Corollaire 5.2.3. *Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est non nulle alors e^A est inversible d'inverse e^{-A}.*

5.3 Applications bilinéaires

Soient $(X_1, \| \ \|_{X_1}), (X_2, \| \ \|_{X_2})$ et $(Y, \| \ \|_Y)$ trois espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Définition 5.3.1. *Une application $f : X_1 \times X_2 \to Y$ est dite* **bilinéaire** *si elle est linéaire en chacune des ses variables, i.e. :*

- $\forall x_1, \tilde{x}_1 \in X_1, x_2 \in X_2,\ f(x_1 + \tilde{x}_1, x_2) = f(x_1, x_2) + f(\tilde{x}_1, x_2);$
- $\forall x_1 \in X_1, x_2, \tilde{x}_2 \in X_2,\ f(x_1, x_2 + \tilde{x}_2) = f(x_1, x_2) + f(x_1, \tilde{x}_2);$
- $\forall x_1 \in X_1, x_2 \in x_2,\ \lambda \in \mathbb{K},\ f(\lambda x_1, x_2) = \lambda f(x_1, x_2) = f(x_1, \lambda x_2).$

La forme bilinéaire f est dite **symétrique** *si $f(x, y) = f(y, x)$ pour $(x, y) \in X_1 \times X_2$.*

Proposition 5.3.2 (Caractérisation fondamentale)**.** *Soit $f : X_1 \times X_2 \to Y$ une application bilinéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

i) L'application f est continue.

ii) L'application f est continue en $(0, 0) \in X_1 \times X_2$.

iii) Il existe $C \geq 0$ tel qu'on ait :

$$\|f(x_1, x_2)\|_Y \leq C \|x_1\|_{X_1} \|x_2\|_{X_2}.$$

pour tous $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$.

Preuve. Suivre la preuve de la Proposition 5.0.2. □

On considère ici l'espace vectoriel des fonctions bilinéaires continues de $X_1 \times X_2$ dans Y, dénoté par $L_c(X_1 \times X_2, Y)$. La définition suivante donne un norme pour $L_c(X_1 \times X_2, Y)$.

Définition 5.3.3. *Pour toute $f \in L_c(X_1 \times X_2, Y)$ on définit*

$$|||f||| = \|f\|_{X_1 \times X_2, Y} = \sup_{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2, x_1 \neq 0, x_2 \neq 0} \frac{\|f(x_1, x_2)\|_Y}{\|x_1\|_{X_1} \|x_2\|_{X_2}}.$$

Remarque 5.3.4. On peut tout généraliser aux applications multilinéaires.

6 Calcul différentiel élémentaire en dimension finie

Dans ce chapitre on arrive finalement au calcul différentiel, on fixe donc $n, m \geq 1$ et on considère des fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ sont des espaces vectoriels à dimension finie sur $\mathbb{R}$, on les considérera toujours comme des espaces vectoriels normé dans les quels toutes les normes sont équivalentes. Par abus de notation, on utilisera la notation $\| \|$ pour les deux (plutôt que indiquer $\| \|_n$ une norme sur $\mathbb{R}^n$ et $\| \|_m$ une norme sur $\mathbb{R}^m$). On gardera bien en tête que $(\mathbb{R}^n, \| \|)$ et $(\mathbb{R}^m, \| \|)$ vérifient Bolzano-Weierstrass et, de plus, ils sont des espaces de Banach (toute suite de Cauchy est donc convergente).

À partir d'ici, on convient que les points de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ sont représentés par des vecteurs colonnes et on note $\underline{0}$ le vecteur colonne de 0, i.e.

$$x \in \mathbb{R}^n, \quad x = {}^t(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \underline{0} \in \mathbb{R}^n, \quad \underline{0} = {}^t(0, \ldots, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pour $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, on écrira, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $x \mapsto f(x) = {}^t(f_1(x), \ldots, f_m(x))$, ou

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}, \quad \text{ou} \quad f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}.$$

Noter, que par abus de notation on écrit $f(x_1, \ldots, x_n)$ (ou $f_i(x_1, \ldots, x_n)$) plutôt que $f \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ou $f({}^t(x_1, \ldots, x_n))$.

Dans ce chapitre, une suite de $\mathbb{R}^n$ sera noté $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ où pour tout $k \in \mathbb{N}$, x^k est un vecteur (colonne) de $\mathbb{R}^n$, donc $x^k = {}^t(x_1^k, \ldots, x_n^k)$.

On reprend ici rapidement quelque résultat sur la continuité, que on a déjà vu de manière plus général dans les chapitres précédents.

Définition 6.0.1. *Soit $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, et soit $\bar{x} \in E$.*
On dit que f est **continue** *en $\bar{x}$ si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in E$,*

$$\|x - \bar{x}\| < \eta \quad \Rightarrow \quad \|f(x) - f(\bar{x})\| < \epsilon.$$

On dit que f est **continue sur une partie** *$U \subseteq E$ si f est continue en tout point $\bar{x} \in U$.*
On dit que f est **uniformément continue sur** *E si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $\bar{x}, x \in E$,*

$$\|x - \bar{x}\| < \eta \quad \Rightarrow \quad \|f(x) - f(\bar{x})\| < \epsilon.$$

*On dit que f est K-***Lipschitzienne** *sur E, pour $K \geq 0$, si pour tout $x, y \in E$:*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq K\|x - y\|.$$

Proposition 6.0.2. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Pour $E \subseteq \mathbb{R}^n$, on définit la restriction $f|_E : E \to \mathbb{R}^m$ $f|_E(x) := f(x)$ $\forall x \in E$. Alors*

i) Si f est continue sur $\mathbb{R}^n$, alors $f|_E$ est continue.

ii) Si f est continue en $\bar{x} \in E$, $f|_E$ est continue en $\bar{x} \in E$.

iii) Si E est un voisinage de $\bar{x}$ dans $\mathbb{R}^n$ et $f|_E$ est continue en $\bar{x} \in E$, alors f est continue en $\bar{x} \in E$.

Proposition 6.0.3. *La continuité est stable pour un certain nombre d'opérations :*

i) *Si* $f, g : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *sont continues en* $\bar{x} \in E$, *alors* $f + g$ *et* λg *sont continues en* $\bar{x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

ii) *Si* $f, g : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *sont continues en* $\bar{x} \in E$, *alors* fg *est continue en* $\bar{x}$.

iii) *Si* $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *est continue en* $\bar{x} \in E$ *et* $f(\bar{x}) \neq 0$, *alors* $1/f$ *est bien définie dans un voisinage de* $\bar{x}$ *et est continue en* $\bar{x}$.

iv) *Si* $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *est continue en* $\bar{x} \in E$, *et si* $g : f(E) \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ *est continue en* $f(\bar{x})$, *alors* $g \circ f$ *est continue en* $\bar{x}$.

v) *Si* $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *est continue en* $\bar{x} \in E$ *et* $g : F \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ *est continue en* $\bar{y} \in F$, *alors* $h : E \times F \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ *définie par* $h(x, y) := f(x) + g(y)$ *est continue en* $(\bar{x}, \bar{y})$.

vi) *Si* $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *est continue en* $\bar{x} \in E$ *et* $g : F \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *est continue en* $\bar{y} \in F$, *alors* $p : E \times F \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *définie par* $p(x, y) := f(x)g(y)$ *est continue en* $(\bar{x}, \bar{y})$.

   Si $g(\bar{y}) \neq 0$ *alors* $q : E \times F \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *définie par* $q(x, y) := f(x)/g(y)$ *est continue en* $(\bar{x}, \bar{y})$.

Proposition 6.0.4. *i)* *Si* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *est continue alors pour tout* $j = 1, \dots, n$, *pour tout* $\bar{x}_\ell \in \mathbb{R}$, $\ell \neq j$, *fixés, l'application partielle* $g_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$t \mapsto g_j(t) := f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{j-1}, t, \bar{x}_{j+1}, \dots, \bar{x}_n),$$

est continue.

ii) *Soit* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = {}^t(f_1(x), \dots, f_m(x)) \in \mathbb{R}^m$. f *est continue si et seulement si chaque projection (composante)* $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, *est continue.*

Remarque 6.0.5. ATTENTION : La réciproque de la Proposition 6.0.4-*i*) est fausse en général. Voir le contre-exemple dans la Rémarque 2.4.4.

Proposition 6.0.6. *Soit* $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *et soit* $\bar{x} \in E$. *La fonction* f *est continue en* $\bar{x}$ *si et seulement si, pour toute suite* $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ *de* E *qui converge vers* $\bar{x}$, *la suite* $(f(x^k))_{k \in \mathbb{N}}$ *converge vers* $f(\bar{x})$.

Remarque 6.0.7. On rappelle ici que une suite $(x^k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ converge si et seulement si chaque composante converge.

Proposition 6.0.8. *Soit* $E \subseteq \mathbb{R}^n$, *et soit* $f : E \to \mathbb{R}^m$ *une application. L'application* f *est continue sur* E *si et seulement si, pour tout ouvert (resp. fermé)* $O \subseteq \mathbb{R}^m$, $f^{-1}(O)$ *est un ouvert (resp. fermé) de* $(E, |\ |)$. *Si* E *est ouvert (resp. fermé),* f *est continue sur* E *si et seulement si, pour tout ouvert (resp. fermé)* $O \subseteq \mathbb{R}^m$, $f^{-1}(O)$ *est un ouvert (resp. fermé) de* $\mathbb{R}^n$.

Remarque 6.0.9. On rappelle ici que $E \subseteq \mathbb{R}^n$ est un ensemble compact si et seulement si E est fermé borné.

Proposition 6.0.10. *Soit* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *un ensemble compact, et soit* $f : E \to \mathbb{R}^m$ *continue sur* E. *Alors* $f(E)$ *est un compact de* $\mathbb{R}^m$ *et la fonction* f *est uniformément continue sur* E.

Corollaire 6.0.11 (Théorème de Weierstrass)**.** *Soit* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *un ensemble compact, et soit* $f : E \to \mathbb{R}$ *continue sur* E. *Alors* f *atteint ses bornes.*

Si une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est linéaire alors il existe une unique matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ (m lignes, n colonnes), $A = (A_{i,j})_{i=1,\ldots,m\ j=1,\ldots,n}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = Ax$ (Rappel: on considère $x \in \mathbb{R}^n$ comme un vecteur colonne). Cette matrice A est appelée la matrice représentative de l'application linéaire f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et de $\mathbb{R}^m$.

Soit $(e_1^n, \ldots, e_n^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et $(e_1^m, \ldots, e_m^m)$ la base canonique de $\mathbb{R}^m$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$f(x) = f\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j^n\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j f\left(e_j^n\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} A_{i,j} x_j\right) e_i^m,$$

où pour $j = 1, \ldots, n$, $i = 1, \ldots, m$, on a noté

$$A_{i,j} := \left(f\left(e_j^n\right)\right)_i = f_i\left(e_j^n\right)$$

les m composantes du vecteur $f(e_j^n)$ de $\mathbb{R}^m$ sur la base canonique $(e_1^m, \ldots, e_m^m)$ de $\mathbb{R}^m$. Autrement dit la matrice $A = (A_{i,j})_{i=1,\ldots,m\ j=1,\ldots,n}$ est la matrice représentative de la famille $\{f\left(e_1^n\right), \cdots, f\left(e_n^n\right)\}$ dans la base $(e_1^m, \ldots, e_m^m)$ de $\mathbb{R}^m$. Par conséquent, l'application f est déterminée de façon unique par la matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont ces $A_{i,j}$.

Bien évidemment, la réciproque est aussi vraie. Toute matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ définie une application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ donnée par $f(x) = Ax$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Grâce au Théorème 5.0.3, toute fonction linéaire de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est continue et, grâce à la Proposition 5.0.2, elle envoi des ensembles bornés de $\mathbb{R}^n$ dans des ensemble bornés de $\mathbb{R}^m$. Comme déjà vu dans la Section 5.2, pour les applications linéaires on utilisera la norme subordonnée $|||\ |||$. Une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ est dite une **forme linéaire**.

Une **forme bilinéaire** f sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ est une application $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que pour tous a et $b \in \mathbb{R}^n$, les applications partielles

- $f(a, \cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $y \mapsto f(a, y)$
- $f(\cdot, b) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto f(x, b)$

soient linéaires, i.e. des formes linéaires.

Le premier exemple fondamental de forme bilinéaire est le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^n$ $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ voir Exemple 1.2.15.

Comme pour les applications linéaires on a la représentation matricielle suivante. Soit f une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Alors il existe une unique matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que pour $x, y \in \mathbb{R}^n$ on ait

$$f(x, y) = \langle Ax, y\rangle = {}^t y A x = {}^t({}^t A y)x = \langle x, {}^t A y\rangle.$$

La matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est la matrice ayant pour coefficients

$$A_{i,j} = f\left(e_j, e_i\right)$$

ainsi pour $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$f(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} x_j y_i.$$

Cette matrice A est alors appelée la matrice représentative de la forme bilinéaire f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^n$, ici indiquée avec $(e_1, \ldots, e_n)$.

La forme bilinéaire f est symétrique si et seulement si sa matrice représentative A est symétrique, c'est-à-dire si $A_{i,j} = A_{j,i}$ pour $i, j = 1, ..., n$.

Une **forme quadratique** f sur $\mathbb{R}^n$ est une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que

- $f(\lambda x) = \lambda^2 f(x)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^n$

- l'application $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\phi(x,y) := f(x+y) - f(x) - f(y), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

  est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Soit f une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$. Alors il existe une unique matrice *symétrique* $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que pour $x, y \in \mathbb{R}^n$ on ait

$$f(x) = \langle Ax, x\rangle \quad \text{et} \quad \phi(x,y) = \langle Ax, y\rangle.$$

En effet $\phi(x,y) = \phi(y,x)$, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, implique ${}^t yAx = {}^t xAy$, mais ${}^t xAy = {}^t(Ay)x = {}^t y\, {}^t Ax$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, i.e. ${}^t A = A$.

6.1 Dérivées partielles

Nous partons d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour généraliser par étapes la notion de dérivabilité aux fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$.

Soit $O \subseteq \mathbb{R}$ un ouvert, $\bar{x} \in O$ et $f : O \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est **une fois derivable** en $\bar{x}$ s'il existe un nombre $f'(\bar{x}) \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x})}{h} = f'(\bar{x}).$$

$f'(\bar{x})$ est appelé la **dérivée première** ou **d'ordre un** de f en $\bar{x}$.

Pour simplifier dans ce qui suit et quand il n'y aura pas d'ambiguité, on dira dérivable à la place de une fois dérivable et dérivée à la place de dérivée première ou d'ordre un.

On peut réexprimer cette définition comme ceci : f est derivable en $\bar{x}$, s'il existe un nombre $f'(\bar{x})$ et une fonction $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur un voisinage de 0, continue en 0 et satisfaisant $\varepsilon(0) = 0$, tels que

$$f(\bar{x}+h) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})h + |h|\varepsilon(h)$$

pour tout h dans un voisinage de 0.

En effet, d'une part, si f est derivable en $\bar{x}$, on peut écrir pour tout $h \neq 0$ dans un voisinage de l'origine

$$\frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x})}{h} = f'(\bar{x}) + \tilde{\varepsilon}(h)$$

où $\tilde{\varepsilon}(h) \to 0$ lorsque $h \to 0$. La fonction ε définie dans un voisinage de l'origine par

$$\varepsilon(h) := \frac{h}{|h|}\tilde{\varepsilon}(h) \quad \text{pour} \quad h \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \varepsilon(0) = 0,$$

est bien continue en 0, satisfait $\varepsilon(0) = 0$, et on a bien $f(\bar{x}+h) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})h + |h|\varepsilon(h)$. Pour démontrer la réciproque, on note que $\varepsilon(h) \to 0$ lorsque $h \to 0$ implique $(|h|/h)\varepsilon(h) \to 0$ lorsque $h \to 0$.

Remarque 6.1.1. Si f est dérivable en $\bar{x}$ et si on note $h = x - \bar{x}$, on obtient au voisinage de $\bar{x}$:

$$f(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + |x - \bar{x}|\varepsilon(x - \bar{x}).$$

En d'autres termes, f est dérivable en $\bar{x}$ si elle est "bien approchée" par sa droite tangente

$$x \mapsto T(x) := f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x})$$

dans un voisinage du point $\bar{x}$, i.e. $f(x) - T(x) = o(|x - \bar{x}|)$ quand $x \to \bar{x}$.

Une fonction est donc dérivable en un point si elle est bien approchée dans un voisinage de ce point par une fonction affine (sa tangente dans le cas d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$). C'est cette formulation que nous généraliserons pour définir la différentiabilité des fonctions de plusieurs variables.

De manière triviale, on peut généraliser la notion de dérivabilité aux fonctions $f : O \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$.

Définition 6.1.2. *Soit $O \subseteq \mathbb{R}$ un ouvert, $\bar{x} \in O$ et $f : O \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ une fonction. On dit que f est* **une fois derivable** *en $\bar{x}$ s'il existe un élément $l \in \mathbb{R}^m$ tel que*

$$f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + lh + |h|\varepsilon(h)$$

où $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ est définie sur un voisinage de 0, continue en 0 et satisfaisant $\varepsilon(0) = \underline{0} \in \mathbb{R}^m$, ici $h \in \mathbb{R}$. Cet élément l, qui est alors unique, est noté $f'(\bar{x})$ ou $\frac{df}{dx}(\bar{x})$ et appelé la **dérivée première** *de f en $\bar{x}$.*

On dit que f est **dérivable** *(ou admet une dérivée)* **dans une partie** *$V \subseteq O$ si f est dérivable en chaque point de V. La fonction $f' : V \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ définie par*

$$x \mapsto f'(x)$$

est appelée la **fonction dérivée** *de f dans V.*

Comme précédemment pour simplifier quand il n'y aura pas d'ambiguité, on dira dérivable à la place de une fois dérivable et dérivée à la place de dérivée première.

On a immédiatement la proposition suivante :

Proposition 6.1.3. *Soit $O \subseteq \mathbb{R}$ un ouvert, $\bar{x} \in O$ et $f : O \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ une fonction. Alors la fonction f est dérivable en $\bar{x}$ si et seulement si les m composantes $f_i : O \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont dérivables en $\bar{x}$ pour $i = 1, \dots, m$ et dans ce cas*

$$f'(\bar{x}) = \begin{pmatrix} f_1'(\bar{x}) \\ \vdots \\ f_m'(\bar{x}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

On définit maintenant la dérivée seconde.

Définition 6.1.4. *Soit $O \subseteq \mathbb{R}$ un ouvert, $\bar{x} \in O$ et $f : O \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ une fonction. On dit que f est* **deux fois dérivable** *en $\bar{x}$ si la fonction f admet une dérivée dans un ouvert $V \subseteq O$ tel que $\bar{x} \in V$, et si la fonction dérivée f' est dérivable en $\bar{x}$. Cette dérivée est notée*

$$f''(\bar{x}) \quad ou \quad \frac{d^2 f}{dx^2}(\bar{x})$$

et appelée la **dérivée seconde** *ou* **d'ordre deux** *de f en $\bar{x}$.*

On dit que f est **deux fois dérivable** *(ou admet deux dérivées) dans une partie $E \subseteq O$ si la fonction f admet une dérivée seconde en chaque point de E. La fonction $f'' : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ définie par*

$$x \mapsto f''(x)$$

est appelée la **dérivée seconde** *de f dans E.*

Par définition on a donc $f''(\bar{x}) = (f')'(\bar{x})$.

Exemple 6.1.5. Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$ définie pour $x \neq 0$ par

$$f(x) := \begin{pmatrix} x^2 \\ \frac{1}{x} \end{pmatrix}.$$

(Noter $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$!)

On a $f' : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$ et $f'' : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$

$$f'(x) := \begin{pmatrix} 2x \\ -\frac{1}{x^2} \end{pmatrix}, \quad f''(x) := \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{2}{x^3} \end{pmatrix}.$$

Remarque 6.1.6. La définition de dérivabilité donnée est restreinte aux ouverts de $\mathbb{R}$. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ est une fonction définie dans un intervalle fermé $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, on définit la notion de dérivée à droite en a (resp. à gauche en b) en considérant de façon classique des limites à droite en a (resp. à gauche en b). On conviendra alors de dire que f est dérivable dans $[a,b]$ si f est dérivable dans $]a,b[$, dérivable à droite en a et dérivable à gauche en b.

On examine maintenant le cas $f : O \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ avec $n \geq 2$.

Si $\bar{x} = {}^t(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$ est un point d'un ouvert $O \subseteq \mathbb{R}^n$ et j est un indice compris entre 1 et n, il existe un intervalle ouvert O_j de $\mathbb{R}$ contenant $\bar{x}_j$ tel que les points $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{j-1}, x_j, \bar{x}_{j+1}, \ldots, \bar{x}_n)$ appartiennent à O lorsque le point x_j appartient à O_j (avec des conventions d'écriture évidentes pour $j = 1$ et $j = n$). En effet, si par exemple on munit $\mathbb{R}^n$ de la norme

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|,$$

il existe $r > 0$ tel que $\{x \in \mathbb{R}^n ; \|x - \bar{x}\|_\infty < r\} \subseteq O$ et donc on pourra prendre $O_j =]\bar{x}_j - r, \bar{x}_j + r[$.

Définition 6.1.7. *Soit $f : O \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction définie dans un ouvert $O \subseteq \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, $\bar{x} \in O$ et $1 \leq j \leq n$. On dit que f* **admet une dérivée partielle première** *(ou d'ordre un)* **par rapport à la variable** *x_j en $\bar{x}$ si l'application partielle $g_j : O_j \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$*

$$t \mapsto g_j(t) := f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{j-1}, t, \bar{x}_{j+1}, \ldots, \bar{x}_n),$$

est dérivable au point $\bar{x}_j$. Sa dérivée est alors notée

$$\partial_j f(\bar{x}) \quad ou \quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x})$$

et appelée la **dérivée partielle première** *ou* **d'ordre un** *au point $\bar{x}$ de f par rapport à la variable x_j.*

On dit que f est **admet une dérivée partielle première** *(ou d'ordre un)* **par rapport à la variable x_j dans une partie** *$V \subseteq O$ si f admet une dérivée partielle première par rapport à la variable x_j en chaque point de V. La fonction $\partial_j f : V \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ définie par*

$$x \mapsto \partial_j f(x)$$

est appelée la **fonction dérivée partielle première** *ou* **d'ordre un** *de f par rapport à la variable x_j dans V.*

Comme précédemment pour simplifier dans ce qui suit et quand il n'y aura pas d'ambiguitè, on dira dérivée partielle à la place de dérivée partielle première ou d'ordre un.

Par définition on a donc

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}) = \frac{dg_j}{dt}(\bar{x}_j) = g_j'(\bar{x}_j)$$

où g_j est la fonction définie dans O_j, $g_j : O_i \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, par

$$t \mapsto g_j(t) := f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{j-1}, t, \bar{x}_{j+1}, \ldots, \bar{x}_n).$$

La recette pour calculer la dérivée partielle par rapport à la variable x_j est donc la suivante

- on fixe toutes les autres variables à leur valeur au point considéré,
- puis on dérive la fonction d'une seule variable ainsi obtenue.

Exemple 6.1.8. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie pour $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} \frac{x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2)}{x_1^2 + x_2^2} & \text{si } (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}$$

On calcules ses dérivées partielles premières.

On fixe $x_2 \neq 0$, et on considère la fonction $g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g_1(t) = t x_2 \frac{t^2 - x_2^2}{t^2 + x_2^2}$. Sa dérivée première est

$$g_1'(t) = x_2 \frac{t^2 - x_2^2}{t^2 + x_2^2} + t x_2 \frac{2t(t^2 + x_2^2) - (t^2 - x_2^2) 2t}{(t^2 + x_2^2)^2} = x_2 \frac{t^2 - x_2^2}{t^2 + x_2^2} + \frac{4t^2 x_2^3}{(t^2 + x_2^2)^2}.$$

On a alors que pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ avec $x_2 \neq 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = g_1'(x_1) = x_2 \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} + \frac{4x_1^2 x_2^3}{(x_1^2 + x_2^2)^2}.$$

Pour $x_2 = 0$, on a $f(x_1, 0) = 0$ pour tout $x_1 \in \mathbb{R}$, et donc

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, 0) = 0.$$

De manière analogue, pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ avec $x_1 \neq 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = x_1 \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} - \frac{4x_1^3 x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(0, x_2) = 0.$$

D'après la Proposition 6.1.3, on a immédiatement la proposition suivante :

Proposition 6.1.9. *Soit $f : O \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction définie dans un ouvert $O \subseteq \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, $\bar{x} \in O$. Alors la fonction f a une dérivée partielle en $\bar{x}$ par rapport à la variable x_j si et seulement si les m composantes $f_i : O \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ont des dérivées partielles en $\bar{x}$ par rapport à la variable x_j pour $i = 1, \ldots, m$ et dans ce cas*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(\bar{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(\bar{x}) \end{pmatrix}.$$

On introduit deux notations qui seront utilisées dans la suite.

Définition 6.1.10. *Soit $f : O \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction définie dans un ouvert $O \subseteq \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, et admettant des dérivées partielles en un point $\bar{x}$ de O. Le vecteur $\nabla f(\bar{x})$ de $\mathbb{R}^n$ défini par*

$$\nabla f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}) \end{pmatrix}$$

est appelé le **gradient** *de f en $\bar{x}$.*

Définition 6.1.11. *Soit $f : O \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction définie dans un ouvert O de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, et admettant des dérivées partielles en un point $\bar{x} \in O$. La matrice $J_f(\bar{x}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ définie par*

$$J_f(\bar{x}) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x})_{i=1,\ldots,m \;\; j=1,\ldots,n}$$

est appelé la **matrice jacobienne** *de f en $\bar{x}$ et si $m = n$ son déterminant est appelé le* **jacobien** *de f en $\bar{x}$, noté* $\det(J_f(\bar{x}))$ *ou* $\dfrac{\partial (f_1, \ldots, f_n)}{\partial (x_1, \ldots, x_n)}(\bar{x})$.

De façon détaillée la matrice jacobienne s'écrit

$$J_f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\bar{x}) \end{pmatrix}.$$

On définit maintenant les dérivées partielles secondes.

Définition 6.1.12. *Soit $f : O \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction définie dans un ouvert $O \subseteq \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, $\bar{x} \in O$, $1 \leq i, j \leq n$. On dit que f admet une* **dérivée partielle seconde** *(ou d'ordre deux)* **par rapport aux variables** x_i **et** x_j *en $\bar{x}$ si la fonction f admet une dérivée partielle par rapport à la variable x_j dans un ouvert $V \subseteq O$ tel que $\bar{x} \in V$, et si la fonction dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ admet une dérivée partielle en $\bar{x}$ par rapport à la variable x_i. Cette dérivée partielle est alors notée*

$$\begin{array}{llll} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}) & \textit{ou} \quad \partial^2_{ij} f(\bar{x}) & \textit{si} & i \neq j \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\bar{x}) & \textit{ou} \quad \partial^2_{ii} f(\bar{x}) & \textit{si} & i = j \end{array}$$

et appelée la **dérivée partielle seconde** *ou* **d'ordre deux** *de f en $\bar{x}$ par rapport aux variables x_i et x_j.*

On dit que f admet une **dérivée partielle seconde** *(ou d'ordre deux)* **par rapport aux variables** x_i **et** x_j **dans une partie** $E \subseteq O$ *si la fonction f admet une dérivée partielle seconde par rapport aux variables x_i et x_j en chaque point de E. La fonction $\partial^2_{ij} f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ définie par*

$$x \mapsto \partial^2_{ij} f(x)$$

est appelée la **dérivée seconde de** f **par rapport aux variables** x_i **et** x_j **dans** E.

Par définition on a donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}) = \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)}{\partial x_i}(\bar{x})$$

ce qui signifie qu'on dérive d'abord par rapport à x_j puis par rapport à x_i.

De façon générale l'ordre des deux dérivations est important. Ainsi par exemple :

Exemple 6.1.13. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie pour $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} \frac{x_1 x_2 \left(x_1^2 - x_2^2\right)}{x_1^2 + x_2^2} & \text{si } (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}$$

On a vu dans l'Exemple 6.1.8 que f admet des dérivées partielles premières $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ définies sur $\mathbb{R}^2$. Pour rappel, pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ avec $x_2 \neq 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = x_2 \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} + \frac{4 x_1^2 x_2^3}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, 0) = 0$$

et, pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ avec $x_1 \neq 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = x_1 \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} - \frac{4 x_1^3 x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(0, x_2) = 0.$$

Or pour tout $x_2 \neq 0$, on a $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0, x_2) = -x_2$ et $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) = 0$, i.e. $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0, x_2) = -x_2$, pour tout $x_2 \in \mathbb{R}$. Donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0,0) = -1.$$

Mais pour tout $x_1 \neq 0$, on a $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, 0) = x_1$ et $\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) = 0$. Donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0,0) = 1$$

Finalement, f admet des dérivées partielles secondes en $(0,0)$ avec

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0,0) = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0,0) = -1.$$

Cependant sous une hypothèse de continuité, l'ordre dans lequel on dérive est sans importance.

Théorème 6.1.14 (de Schwarz). *Soit $f : O \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction définie dans un ouvert $O \subseteq \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. Si les dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ existent dans un ouvert contenant $\bar{x}$ et sont continues en $\bar{x}$, alors*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{x}).$$

Exemple 6.1.15. Dans l'exemple précédent on a que f est continue sur $\mathbb{R}^2$. En effet elle est continue en tout point différent de $(0,0)$ (composition de fonctions continues) et pour tout $(x_1, x_2) \neq (0,0)$ on a

$$|f(x_1,x_2)| \leq |x_1 x_2| \frac{|x_1^2 - x_2^2|}{x_1^2 + x_2^2} \leq |x_1 x_2| \left(\frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2} + \frac{x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} \right) \leq 2|x_1 x_2|,$$

Donc, pour tout suite de points $(x^k) = (x_1^k, x_2^k) \to (0,0)$ pour $k \to +\infty$, on a bien que

$$0 \leq \lim_{k \to +\infty} |f(x_1^k, x_2^k)| \leq \lim_{k \to +\infty} |x_1^k x_2^k| = 0.$$

Ses dérivées partielles premières $\frac{\partial f}{\partial x_1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $\frac{\partial f}{\partial x_2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont aussi continues sur $\mathbb{R}^2$ ($\frac{\partial f}{\partial x_1}$ est continue en dehors de $(x_1, 0)$ et pour tout suite de points $(x_1^k, x_2^k) \to (x_1, 0)$ pour $k \to +\infty$ on a bien $\lim_{k \to +\infty} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^k, x_2^k) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, 0) = 0$, de manière analogue pour $\frac{\partial f}{\partial x_2}$).

Cependant, même si les dérivées partielles secondes

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

existent en tout point (Vérifier !), elle ne sont pas continues en $(0,0)$. En effet pour tout $(x_1, x_2) \neq (0,0)$, on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} - \frac{4x_1^2 x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} + \frac{12x_1^2 x_2^2 (x_1^2 + x_2^2)^2 - 16x_1^2 x_2^4 (x_1^2 + x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^4}$$

et pour $(x, x) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x, x) = 0 - \frac{4}{4} + \frac{12(2)^2 - 16(2)}{2^4} = 0 - 1 + 1 = 0$$

alors que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0,0) = -1.$$

De manière analogue on montre que $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ n'est pas continue en $(0,0)$.

On introduit enfin la notation suivante :

Définition 6.1.16. *Soit $f : O \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction définie dans un ouvert O de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, et admettant des dérivées partielles d'ordre 2 en un point $\bar{x}$ de O. La matrice $H_f(\bar{x}) \in M_n(\mathbb{R})$ définie par*

$$H_f(\bar{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x})_{i=1,\dots,n \ j=1,\dots,n}$$

est appelé la **matrice hessienne** *de f en $\bar{x}$,*

De façon détaillée la matrice hessienne s'écrit

$$H_f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\bar{x}) \end{pmatrix}.$$

Les formules sont et seront écrites de façon générale pour $n \geq 1$ en convenant que si $n = 1$ les notions de dérivées partielles et de dérivées coïncident, c'est-à-dire

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{df}{dx} = f' \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \frac{d^2 f}{dx^2} = f''$$

Il n'y a pas grand-chose à dire de plus sur les dérivées partielles : vous savez tout, puisqu'il s'agit simplement de fonctions d'une seule variable. Toutes les propriétés des dérivées des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont valables (dérivée de la somme, du produit, du rapport de fonctions, dérivée d'une composition de fonctions, etc.).

Malheureusement, cette notion ne suffit pas, car par exemple il arrive que toutes les dérivées partielles d'une fonction soient définies en un point, mais que la fonction ne soit pas continue en ce point.

Exemple 6.1.17. Prenons par exemple $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} 0 & \text{si } x_1 = 0 \text{ ou } x_2 = 0, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a $f(0, x_2) = 0$ pour tout $x_2 \in \mathbb{R}$ et $f(x_1, 0) = 0$ pour tout $x_1 \in \mathbb{R}$, donc

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) = 0,$$

et pourtant f n'est pas continue en $(0,0)$ (car $f(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $f(0,0) = 0$).

6.2 Différentiabilité

On cherche donc une notion de dérivation de type « global » par rapport aux n variables réelles pour des fonctions de n variables réelles pour $n \geq 1$.

Commençons par donner une définition dans un style un peu informel : on dit que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est différentiable en un point $\bar{x}$ si elle est « bien approchée » par une application affine aux alentours du point $\bar{x}$, c'est-à-dire par une application de la forme

$$x \mapsto T(x) := f(\bar{x}) + M(x - \bar{x})$$

pour une certaine matrice $M \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, au sens où $f(x) - T(x) = o(\|x - \bar{x}\|)$ quand $x \to \bar{x}$.

Passons ensuite à une définition plus formelle.

Définition 6.2.1. *Soit $f : O \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction définie dans un ouvert $O \subseteq \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, $\bar{x} \in O$. On dit que f est* **une fois différentiable** *en $\bar{x}$ s'il existe une application linéaire $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ telle que pour une norme $\| \ \|$ sur $\mathbb{R}^n$*

$$f(\bar{x}+h) = f(\bar{x}) + L(h) + \|h\|\varepsilon(h),$$

où ε est une fonction définie dans un voisinage de $\underline{0} \in \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, continue en $\underline{0} \in \mathbb{R}^n$ et satisfaisant $\varepsilon(\underline{0}) = \underline{0} \in \mathbb{R}^m$, ici $h \in \mathbb{R}^n$. Cette application linéaire L qui est alors unique, est notée $df(\bar{x})$ et appelé la **différentielle première** *ou* **d'ordre un** *de f en $\bar{x}$.*

On dit que f est **une fois différentiable** *(ou admet une différentielle première)* **dans une partie** *$V \subset O$ si elle est différentiable en tout point de V et on note df l'application $df : V \to L_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ définie par*

$$x \mapsto df(x).$$

Notation : Si f est une fois différentiable en $\bar{x}$, alors $df(\bar{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est une application linéaire, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ $h \mapsto df(\bar{x})(h) \in \mathbb{R}^m$ et elle est représentée par une matrice de $M_{m,n}(\mathbb{R})$ que on déterminera plus tard.

Comme dans la Définition 6.1.3 cette formule a bien un sens pour un accroissement h petit dans un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$.

Pour simplifier on dira différentiable à la place de une fois différentiable et différentielle à la place de différentielle première ou d'ordre un.

Preuve de l'unicité. Soit L_1 et L_2 deux applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ telles que pour h petit dans $\mathbb{R}^n$

$$f(\bar{x}+h) = f(\bar{x}) + L_1(h) + \|h\|\varepsilon_1(h), \quad f(\bar{x}+h) = f(\bar{x}) + L_2(h) + \|h\|\varepsilon_2(h).$$

Pour $h \neq 0$ dans $h \in \mathbb{R}^n$ fixé, on considère un accroissement de la forme th pour $t \in \mathbb{R}$ petit. D'après les formules précéedentes on a donc

$$L_1(th) - L_2(th) = \|th\|\varepsilon_2(th) - \|th\|\varepsilon_1(th)$$

soit pour $t \neq 0$

$$L_1(h) - L_2(h) = \frac{\|th\|\varepsilon_2(th) - \|th\|\varepsilon_1(th))}{t}.$$

Or pour une norme $\| \ \|$ de $\mathbb{R}^m$ on a

$$\left\| \frac{\|th\|\varepsilon_2(th) - \|th\|\varepsilon_1(th)}{t} \right\| \leq \|h\| \left(\|\varepsilon_2(th)\| + \|\varepsilon_1(th)\| \right)$$

En faisant tendre t vers 0 dans $\mathbb{R}$ on en déduit que $L_1(h) - L_2(h) = \underline{0}$. Ainsi $L_1 = L_2$. □

Remarque 6.2.2. Comme pour la notion de dérivabilité d'une fonction d'une variable réelle, cette notion de différentiabilité d'une fonction de n variables réelles est une notion locale et ne dépend pas des normes données sur $\mathbb{R}^n$ et sur $\mathbb{R}^m$.

En effet, supposons que f soit différentiable en $\bar{x}$ pour la norme $\| \ \|$ et montrons que f l'est encore pour toute autre norme $\| \ \|'$. Pour tout $h \neq \underline{0}$ dans un voisinage de l'origine, on a

$$f(\bar{x}+h) = f(\bar{x}) + J_f(\bar{x})h + \|h\|\varepsilon(h) = f(\bar{x}) + J_f(\bar{x})h + \|h\|' \frac{\|h\|}{\|h\|'}\varepsilon(h)$$

où ε s'annule et est continue en $\underline{0}$. Par équivalence des normes, il existe $M > 0$ tel que

$$\frac{\|h\|}{\|h\|'} \leq M \qquad \text{pour tout} \qquad h \neq 0.$$

Il s'ensuit que la fonction ε' définie dans un voisinage de l'origine par

$$\varepsilon'(h) := \frac{\|h\|}{\|h\|'}\varepsilon(h) \qquad \text{et} \qquad \varepsilon'(\underline{0}) = \underline{0}$$

s'annule et est continue en $\underline{0}$.

Comme pour la dérivabilité des fonctions d'une variable réelle on a

Proposition 6.2.3. *Soit $f : O \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction définie dans un ouvert $O \subseteq \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, $\bar{x} \in O$. Alors la fonction f est différentiable en $\bar{x}$ si et seulement si les m composantes $f_j : O \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont différentiables en $\bar{x}$ pour $j = 1, \ldots, m$ et dans ce cas, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ proche de $\underline{0} \in \mathbb{R}^n$, on a*

$$df(\bar{x})(h) = \begin{pmatrix} df_1(\bar{x})(h) \\ \vdots \\ df_m(\bar{x})(h) \end{pmatrix}.$$

Exemple 6.2.4. 1. Une application constante $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est différentiable en tout point $x \in \mathbb{R}^n$ et sa différentielle est nulle. En effet $f(x+h) = f(x)$ pour tout $x, h \in \mathbb{R}^n$, i.e. $df(x)(h) = \underline{0}$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$.

2. Une application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est différentiable en tout point $x \in \mathbb{R}^n$ et est égale à sa différentielle. En effet $f(x+h) = f(x) + f(h)$ pour tout $x, h \in \mathbb{R}^n$, i.e. $df(x) = f$.

3. Une forme quadratique $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est différentiable en tout point $x \in \mathbb{R}^n$. Munissons $\mathbb{R}^n$ de la norme $\| \ \|_2$. Ecrivons $f(x) = \langle Ax, x\rangle$, où A est une matrice symétrique dans $M_n(\mathbb{R})$. Alors

   $$f(x+h) = \langle A(x+h), x+h\rangle = \langle Ax, x\rangle + \langle Ax, h\rangle + \langle Ah, x\rangle + \langle Ah, h\rangle = f(x) + 2\langle Ax, h\rangle + \langle Ah, h\rangle.$$

   Où on a utilisée le fait que $\langle Ah, x\rangle = {}^t x A h = {}^t(Ah)x = {}^t h\, {}^t A x = {}^t h A x = \langle Ax, h\rangle$.

   On voit que la définition de différentiabilité est satisfaite en prenant

   $$df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad h \mapsto 2\langle Ax, h\rangle,$$

   ainsi que

   $$\varepsilon(h) = \frac{\langle Ah, h\rangle}{\|h\|_2} \text{ pour } h \neq \underline{0} \qquad \text{et} \qquad \varepsilon(\underline{0}) = 0.$$

   Cette fonction est bien continue en $\underline{0}$ car, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz (voir Proposition 1.2.18, noter que la norme définie par le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ est exactement la norme $\| \ \|_2$) et le fait que toute application linéaire est bornée,

   $$\frac{|\langle Ah, h\rangle|}{\|h\|_2} \leq \|Ah\|_2 \leq M\|h\|_2,$$

   pour une certaine constante $M > 0$.

4. Aucune norme n'est différentiable en l'origine. En effet si c'était le cas pour une norme $\| \ \| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, il devrait exister une application linéaire $d_{\| \ \|}(\underline{0}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, représentée par un élément de $M_{1,n}(\mathbb{R})$, i.e. un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$, telle que, pour $h \in \mathbb{R}^2$ dans le voisinage de l'origine,

   $$\|\underline{0} + h\| = \|\underline{0}\| + {}^t v h + \|h\|\varepsilon(h),$$

   i.e. pour h et $-h$

   $$\|h\| = \langle v, h\rangle + \|h\|\varepsilon(h), \quad \text{et} \quad \|h\| = -\langle v, h\rangle + \|h\|\varepsilon(-h)$$

   et donc, pour tout $h \neq \underline{0}$,

   $$2 = \varepsilon(h) + \varepsilon(-h),$$

   ce qui est incompatible avec $\varepsilon(h) \to 0$ si $h \to \underline{0}$.

Remarque 6.2.5. Soit à présent $f : O \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction différentiable en $\bar{x} \in O$, $O \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert. On a alors que $df(\bar{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est une application linéaire. Calculons les éléments de la matrice $M(\bar{x})$ de $M_{m,n}(\mathbb{R})$ qui la représente, en commençant par deux cas particuliers.

Cas d'une f fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. La matrice $M(\bar{x}) \in M_{1,n}(\mathbb{R})$ est une matrice ligne, et peut donc être représentée par un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Ce vecteur est effectivement le gradient de f en $\bar{x}$, dénoté par $\nabla f(\bar{x})$. Voyons que

$$M(\bar{x}) = {}^t\nabla f(\bar{x}) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x})\Big),$$

et donc que

$$df(\bar{x})(h) = {}^t\nabla f(\bar{x})h = \langle \nabla f(\bar{x}), h\rangle = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x})h_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x})h_n$$

pour tout $h \in \mathbb{R}^n$.

En effet, en prenant $h = te_j$ pour un vecteur e_j $(1 \leq j \leq n)$ de la base de $\mathbb{R}^n$ et $t \in \mathbb{R}$ dans un voisinage de l'origine, on déduit de la définition de différentiabilité que

$$f(\bar{x} + te_j) = f(\bar{x}) + M(\bar{x})e_j t + |t|\, \|e_j\| \varepsilon(te_j)$$

où ε est continue et s'annule en $\underline{0}$. Dès lors

$$M(\bar{x})e_j = M(\bar{x})_{1,j} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\bar{x} + te_j) - f(\bar{x})}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}).$$

Cas d'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^m$. La matrice $M(\bar{x}) \in M_{m,1}(\mathbb{R})$ est une matrice colonne, et peut donc être représentée par un vecteur de $\mathbb{R}^m$. Si $f = {}^t(f_1, \dots, f_m)$, on a pour tout $1 \leq i \leq m$

$$M(\bar{x})_i = f_i'(\bar{x}) = \frac{df}{dx}(\bar{x}),$$

et de plus on écrit souvent $f'(\bar{x})$ pour indiquer $M(\bar{x})$, car l'élément i de ce vecteur est simplement la dérivée de l'application f_i en $\bar{x}$.

En effet, pour tout $h \in \mathbb{R}$ dans un voisinage de l'origine, on déduit de la définition de différentiabilité que chaque composante (i.e. pour tout $1 \leq i \leq m$) vérifie

$$f_i(\bar{x} + h) = f_i(\bar{x}) + M(\bar{x})_{i,1}h + |h|\varepsilon_i(h)$$

où ε_i est continue et s'annule en 0. Donc, on trouve

$$M(\bar{x})_{i,1} = \lim_{h\to 0} \frac{f_i(\bar{x} + h) - f_i(\bar{x})}{h} = f_i'(\bar{x}).$$

Cas général. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $M(\bar{x}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ on peut combiner ce qu'on a trouvé dans les deux cas précédents, pour obtenir

$$M(\bar{x})_{i,j} = J_f(\bar{x})_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x}) = \lim_{t\to 0} \frac{f_i(\bar{x} + te_j) - f_i(\bar{x})}{t},$$

si $f = {}^t(f_1, \dots, f_m)$. Donc

$$J_f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\bar{x}) \end{pmatrix}.$$

Si $n = 1$, les notions de différentiabilité et dérivabilité coincident.

Théorème 6.2.6 (Cas $n = 1$)**.** *Soit $f : O \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ une fonction définie dans un ouvert $O \subseteq \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, $\bar{x} \in O$. La fonction f est différentiable en $\bar{x}$ si et seulement si elle est dérivable en $\bar{x}$ et dans ce cas pour tout $h \in \mathbb{R}$ on a*

$$df(\bar{x})(h) = hf'(\bar{x}).$$

Si $n \geq 2$, il arrive que toutes les dérivés partielles d'une fonction soient définies en un point, mais que f ne soit pas différentiable en ce point (voir Exemple 6.1.17). Néanomoins, sous des hypothèses supplémentaires, l'existence des dérivées partielles garantit la différentiabilité :

Théorème 6.2.7 (Cas $n \geq 2$)**.** *Soit $f : O \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction définie dans un ouvert $O \subseteq \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, $\bar{x} \in O$. Si toutes les dérivées partielles de f existent dans un voisinage de $\bar{x}$ et sont continues en $\bar{x}$ alors f est différentiable en $\bar{x}$.*

Remarque 6.2.8. ATTENTION : $f : O \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ peut être différentiable en $\bar{x}$ même si ses dérivées partielles ne sont pas continues en $\bar{x}$.

Définition 6.2.9. *Soit $f : O \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction différentiable dans un ouvert $O \subseteq \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. On dit que f est* **de classe $\mathcal{C}^1$** *lorsque sa différentielle*

$$df : O \to L_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \quad x \mapsto df(x)$$

est une application continue.

Proposition 6.2.10. *Soit $f : O \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction différentiable dans un ouvert $O \subseteq \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. f est de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si ses dérivées partielles sont continues.*

Exemple 6.2.11. On a vu dans l'Exemple 6.1.15 que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie pour $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} \frac{x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2)}{x_1^2 + x_2^2} & \text{si } (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}$$

admet des dérivées partielles continues sur $\mathbb{R}^2$, elle est donc $\mathcal{C}^1$. Sa différentielle en (x_1, x_2) est une application linéaire répresenté par le vecteur gradient

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

avec $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2)$ et $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2)$ définies dans l'Exemple 6.1.13.

$$df(x_1, x_2)(h_1, h_2) = {}^t\nabla f(x_1, x_2) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) h_2.$$

6.3 Propriétés de la différentiabilité

Proposition 6.3.1. *Soit $f : O \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction définie dans un ouvert $O \subseteq \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, $\bar{x} \in O$. Si la fonction f est différentiable en $\bar{x}$, alors f est continue en $\bar{x}$.*

Preuve. D'après la Définition 6.2.4 de différentiabilité, on a, pour tout x dans un voisinage de $\bar{x}$ (prendre $h = x - \bar{x}$) :

$$f(x) - f(\bar{x}) = J_f(\bar{x})(x - \bar{x}) + \|x - \bar{x}\| \varepsilon(x - \bar{x}),$$

où $\varepsilon(x - \bar{x}) \to \underline{0}$ lorsque $x \to \bar{x}$. Par ailleurs, on a vu que pour toute application linéaire représentée par une matrice A, il existe une contante $M > 0$ telle que, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, $\|Ay\| \leq M\|y\|$. Donc

$$\|f(x) - f(\bar{x})\| \leq (M + \|\varepsilon(x - \bar{x})\|)\|x - \bar{x}\| \leq (M + 1)\|x - \bar{x}\|,$$

en prenant x suffisamment proche de $\bar{x}$ pour que $\|\varepsilon(x - \bar{x})\| \leq 1$. Donc f est continue en $\bar{x}$. $\square$

Remarque 6.3.2. ATTENTION : la réciproque n'est pas vraie en general. Il existe des fonctions continues qui ne sont pas différentiables. Par exemple considérons l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1^2 x_2}{x_1^2+x_2^2} & \text{si } (x_1, x_2) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x_1, x_2) = (0,0). \end{cases}$$

Or f est continue sur $\mathbb{R}^2$. En effet elle est continue en tout point différent de $(0,0)$ (composition de fonctions continues) et pour tout $(x_1, x_2) \neq (0,0)$ on a

$$|f(x_1, x_2)| \leq |x_2| \frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2} \leq |x_2|,$$

Donc, pour tout suite de points $(x_1^k, x_2^k) \to (0,0)$ pour $k \to +\infty$, on a bien que

$$0 \leq \lim_{k \to +\infty} |f(x_1^k, x_2^k)| \leq \lim_{k \to +\infty} |x_2^k| = 0.$$

D'autre coté f n'est pas différentiable en $(0,0)$. En effet si f était différentiable en $(0,0)$ il devrait exister une application linéaire $d_f(\underline{0}) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, représentée par un élément de $M_{1,2}(\mathbb{R})$, i.e. un vecteur $v = {}^t(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, telle que, pour $h = {}^t(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ dans le voisinage de l'origine,

$$f(\underline{0} + h) = f(h) = {}^t v h + \|h\| \varepsilon(h),$$

et $v_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0)$ et $v_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0)$. On calcule donc $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0)$. On a $f(x_1, 0) = 0$ pour tout $x_1 \neq 0$ et $f(0,0) = 0$, donc

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) = 0.$$

De manière analogue $\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) = 0$. Or pour $h = {}^t(h_1, h_1)$

$$f(h_1, h_1) = \frac{1}{2} h_1 = \|h\| \varepsilon(h).$$

Si on prend par exemple la norme $\| \ \|_\infty$, pour tout $h_1 \neq \underline{0}$,

$$\frac{1}{2} = \varepsilon(h)$$

ce qui est incompatible avec $\varepsilon(h) \to 0$ si $h \to \underline{0}$.

On peut en effet vérifier que les dérivées partielles ne sont pas continues en $(0,0)$ (elles ne peuvent pas être continues vu que f n'est pas différentiable en $(0,0)$). Pour tout $(x_1, x_2) \neq (0,0)$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{2x_1 x_2^3}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$$

et pour tout $(x, x) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x, x) = \frac{1}{2}.$$

Cependant $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) = 0$.

Proposition 6.3.3. *Supposons $n \geq 2$. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un ouvert, et soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable en un point $\bar{x} \in I$. Alors la fonction $F : I \times \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = f(x_1)$ est différentiable en tout point de la forme $(\bar{x}, x_2, \ldots, x_n)$. De plus*

$$\nabla F(\bar{x}) = {}^t(f'(\bar{x}), 0, \ldots, 0).$$

Proposition 6.3.4. *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et soit $\bar{x} \in E$. Une fonction $f : E \to \mathbb{R}^m$ est différentiable en $\bar{x}$ si et seulement si toutes les fonctions $f_i : E \to \mathbb{R}$ sont différentiables en $\bar{x}$ $(1 \leq i \leq m)$, où on a noté $f = {}^t(f_1, \ldots, f_m)$.*

Proposition 6.3.5. *Soit un ouvert $E \subset \mathbb{R}^n$ et soit $\bar{x} \in E$.*

1. *Si $f, g : E \to \mathbb{R}^m$ sont différentiables en $\bar{x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f + g$ et λf, le sont aussi et*
$$d(f+g)(\bar{x}) = df(\bar{x}) + dg(\bar{x}), \quad d(\lambda f)(\bar{x}) = \lambda df(\bar{x}).$$
2. *Si $f : E \to \mathbb{R}^m$ $k : E \to \mathbb{R}$ sont différentiables en $\bar{x}$, alors kf l'est aussi et*
$$d(kf)(\bar{x}) = f(\bar{x})\ {}^t\nabla k(\bar{x}) + k(\bar{x})df(\bar{x}).$$
3. *Si $f : E \to \mathbb{R}$ est différentiable en $\bar{x}$ et si $f(\bar{x}) \neq 0$, alors $1/f$ est bien définie dans un voisinage de $\bar{x}$ et est différentiable en $\bar{x}$. De plus*
$$\nabla(1/f)(\bar{x}) = -\frac{1}{f^2(\bar{x})}\nabla f(\bar{x}).$$
4. *Si $f : E \to \mathbb{R}^m$ est différentiable en $\bar{x}$, $g : V \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ est différentiable en $f(\bar{x})$ et $f(E) \subseteq V$, alors $g \circ f : E \to \mathbb{R}^p$ est différentiable en $\bar{x}$ et*
$$d(g \circ f)(\bar{x}) = dg(f(\bar{x}))df(\bar{x}).$$

Exemple 6.3.6. 1. La fonction
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2)\ln(x_1^2 + x_2^2 + 1)$$
est différentiable sur $\mathbb{R}^2$. En effet $f = g \circ h$, où
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(z) = \ln(z+1)$$
est différentiable sur l'ouvert $]-1, +\infty[$, et où
$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+, h(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$
est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ (c'est un polynôme). On calcule
$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = g'(h(x_1, x_2))\frac{\partial h}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \Big(\ln(x_1^2 + x_2^2 + 1) + \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 + x_2^2 + 1}\Big)2x_1,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = g'(h(x_1, x_2))\frac{\partial h}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \Big(\ln(x_1^2 + x_2^2 + 1) + \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 + x_2^2 + 1}\Big)2x_2.$$

2. Soient les fonctions
$$g : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \ln x_1 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$
et
$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad h(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ 2x_1 \end{pmatrix}.$$
La fonction $f = g \circ h$ est différentiable sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, et sa matrice jacobienne est donnée par
$$\begin{aligned} J_{g\circ h}(x_1, x_2) &= J_g(h(x_1, x_2))J_h(x_1, x_2) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1^2+x_2^2} & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x_1}{x_1^2+x_2^2} & \frac{2x_2}{x_1^2+x_2^2} \\ 2x_1 - 2 & 2x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

6.4 Différentiabilité : second ordre

Dans cette section, on se restreint aux fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Premièrement, cela nous évitera des notations très lourdes (la dérivée d'une fonction à valeurs vectorielles est une application linéaire, et sa dérivée seconde devient donc une application linéaire à valeurs dans les applications linéaires). Ensuite, une fonction à valeurs vectorielles n'est qu'une collection de fonctions à valeurs réelles, et beaucoup de résultats énoncés pour des fonctions à valeurs réelles se généralisent sans trop de problèmes.

Définition 6.4.1. *Soit $O \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert, $\bar{x} \in O$ et $f : O \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est* **deux fois différentiable** *en $\bar{x} \in O$ si f est définie et est différentiable dans un ouvert $V \subseteq O$, tel que $\bar{x} \in V$, et si $\nabla f : E \to \mathbb{R}^n$ est différentiable en $\bar{x}$.*

La matrice jacobienne de ∇f en $\bar{x}$ s'appelle **matrice hessienne** *de f en $\bar{x}$ et se note $H_f(\bar{x})$:*

$$H_f(\bar{x}) = J_{\nabla f}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\bar{x}) \end{pmatrix}.$$

La différentielle de ∇f en $\bar{x}$ s'appelle **différentielle seconde** *de f en $\bar{x}$ et se note $d^2 f(\bar{x}) \in L_c(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Elle est une forme bilinéaire telle que pour tout $h, k \in \mathbb{R}^n$*

$$d^2 f(\bar{x})(h,k) = \langle d(\nabla f(\bar{x}))(h), k)\rangle = {}^t k H_f(\bar{x}) h$$

et pour $1 \leq i, j \leq n$ on a

$$d^2 f(\bar{x})(e_j, e_i) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}).$$

On dit que f est **deux fois différentiable dans une partie** *$E \subset O$ si elle est deux différentiable en tout point de E et on note $d^2 f$ l'application $d^2 f : V \to L_c(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ définie par*

$$x \mapsto d^2 f(x).$$

Exemple 6.4.2.

1. Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et soit $b \in \mathbb{R}$. La fonction affine $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \langle a, x\rangle + b$ est deux fois différentiable en tout point $x \in \mathbb{R}^n$, et sa matrice hessienne est partout nulle. En effet, on calcule que $\nabla f(x) = a$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, puisque pour tout $h \in \mathbb{R}^n$,
$$f(x+h) = \langle a, x\rangle + b + \langle a, h\rangle = f(x) + \langle \nabla f(x), h\rangle.$$
Donc ∇f est partout différentiable et de différentielle nulle.

2. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. La forme quadratique $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \langle Ax, x\rangle$ est deux fois différentiable en tout point $x \in \mathbb{R}^n$, et sa matrice hessienne vaut $2A$. En effet, on calcule d'abord que $\nabla f(x) = 2Ax$ (voir Exemple 6.2.4-3). Donc ∇f est linéaire, et sa matrice jacobienne vaut $2A$ (voir Exemple 6.2.4-2).

Théorème 6.4.3 (Théorème de Schwarz)**.** *Soit $O \subseteq \mathbb{R}$ un ouvert, $\bar{x} \in O$ et $f : O \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction. Si f est deux fois différentiable en $\bar{x}$, alors sa matrice hessienne est symétrique : pour tout $1 \leq i < j \leq n$,*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{x}).$$

Remarque 6.4.4. L'hypotèse « f est deux fois différentiable en $\bar{x}$ » est nécessaire.

Voilà un contre-exemple : Considérons toujours la fonction des exemples 6.1.8, 6.1.13, 6.1.15 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2)}{x_1^2 + x_2^2} & \text{si } (x_1, x_2) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x_1, x_2) = (0, 0). \end{cases}$$

On a déjà remarqué que toutes les dérivées partielles secondes existent en tout point. En particulier

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0, 0) = -1 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0, 0) = 1.$$

En effet f n'est pas deux fois différentiable en $(0, 0)$. En effet si f était deux différentiable en $(0, 0)$ il devrait exister une application linéaire $d_{\nabla f}(\underline{0}) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, représentée par un élément de $M_2(\mathbb{R})$, i.e. la matrice Hessienne, telle que, pour tout $h = {}^t(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ dans le voisinage de l'origine,

$$\nabla f(\underline{0} + h) = \nabla f(h) = H_f(\underline{0})h + \|h\|\varepsilon(h),$$

or

$$H_f(\underline{0}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Or pour $h = {}^t(h_1, h_1)$

$$\nabla f(h_1, h_1) = \begin{pmatrix} h_1 \\ -h_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h_1 \\ h_1 \end{pmatrix} + \|h\|\varepsilon(h).$$

Si on prend par exemple la norme $\| \ \|_\infty$, pour tout $h_1 \neq \underline{0}$,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \varepsilon(h).$$

ce qui est incompatible avec $\varepsilon(h) \to \underline{0}$ si $h \to \underline{0}$.

($\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2)$ ne sont pas continues en $(0, 0)$, voir Exemple 6.1.15).

Définition 6.4.5. *Soit $f : O \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable dans un ouvert $O \subseteq \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que f est* **de classe $\mathcal{C}^2$** *lorsque sa différentielle seconde*

$$d^2 f : O \to L_c(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \quad x \mapsto d^2 f(x)$$

est une application continue.